

## OBJECTIFS DE FORMATION ET PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

### I OBJECTIFS DE FORMATION

#### 1) Objectifs généraux de la formation

Dans la filière Physique et Sciences de l'Ingénieur, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires à la physique, à l'informatique, à la chimie et aux sciences industrielles.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaître les définitions, les énoncés et les démonstrations des théorèmes figurant au programme, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes. En revanche, certains résultats puissants utiles aux sciences de l'ingénieur sont admis.

##### a) Objectifs de la formation

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels.

- Développer conjointement l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur.
- Promouvoir la réflexion personnelle des étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.
- Exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé, sont des éléments indissociables de cette démarche ; valoriser ainsi l'interaction entre d'une part l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, et d'autre part l'élaboration et la mise en œuvre des concepts théoriques, les phases d'abstraction et de mise en théorie interagissant donc constamment avec celles de passage aux exemples et aux applications.
- Privilégier les problèmes mathématiques susceptibles de développer la réflexion personnelle des étudiants et les capacités de synthèse. En particulier, on ne saurait en aucun cas se limiter à l'étude de problèmes dont les énoncés sont fermés et d'exercices mettant en œuvre des techniques bien répertoriées. Il est nécessaire d'entraîner les étudiants à se poser eux-mêmes des questions, c'est-à-dire à prendre en compte une problématique mathématique ; l'effort de synthèse doit constituer l'aboutissement de cette démarche.

##### b) Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme d'une même discipline, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. Plus largement, l'enseignement d'une discipline scientifique est à relier à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux : organisation concertée des activités d'enseignement d'une même classe ; étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les champs de connaissances (mathématiques et physique, mathématiques et informatique, mathématiques et sciences industrielles. ...).

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, y contribue de façon efficace, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés.

Il importe aussi que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

## 2) Architecture et contenus des programmes

### a) Intentions majeures

Les contenus sont organisés autour de quatre intentions majeures.

- Organiser les programmes autour de quelques notions essentielles, en dégagant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.
- Donner un rôle très important aux travaux pratiques, dont la fonction est double : indiquer le champ des problèmes et phénomènes mathématiques à étudier en relation avec les concepts figurant au programme ; préciser les méthodes et les techniques usuelles exigibles des étudiants. En revanche, les travaux pratiques ne doivent pas conduire à des dépassements de programme prenant la forme d'une anthologie d'exemples dont la connaissance serait exigible des étudiants.
- Mettre en valeur le caractère plurivalent des concepts mathématiques. Cette plurivalence s'inscrit dans un double mouvement : d'une part, l'étude d'un domaine particulier vient enrichir le concept général, grâce au langage et aux méthodes propres à ce domaine ; d'autre part, le concept général permet le transfert des connaissances d'un domaine d'application à un autre. C'est dans cette perspective, et à l'opposé de tout dogmatisme, que les structures constituent un outil pour une meilleure compréhension et une meilleure précision de la pensée et fournissent des méthodes pour l'étude des problèmes mathématiques.
- Réaliser un équilibre global entre l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Il va de soi, d'ailleurs, que cette séparation traditionnelle n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre ces trois grands domaines des mathématiques. Dans cette intention, les programmes sont présentés selon deux grandes parties : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie.

C'est en fonction des objectifs précédents que les programmes sont conçus et que l'horaire hebdomadaire doit être géré. Dans la classe PSI, il est de 10 heures (7 heures de cours et 3 heures de travaux dirigés). Pour valoriser les concepts essentiels et les principales méthodes (comprenant les exemples et contre-exemples qui illustrent leur portée et leurs conditions de validité), il convient de consacrer à leur étude environ 6 heures de cours. Les 4 heures restantes (1 heure de cours et 3 heures de travaux dirigés) sont à consacrer à l'étude de problèmes mathématiques, notamment ceux qui sont indiqués dans les rubriques de travaux pratiques ; à cet égard, toute technicité gratuite est à éviter.

### b) Secteur de l'analyse et de ses interventions

Dans ce secteur, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de fonction, qui permet de modéliser le comportement des phénomènes continus, et de suite (ou de série), qui permet de modéliser le comportement des phénomènes discrets. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur.

Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle des problèmes quantitatifs ; il développe conjointement l'étude du comportement global des suites et des fonctions avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Pour l'étude des solutions des équations, il combine les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact, les méthodes d'approximation et les algorithmes de mise en œuvre. Pour l'ensemble de l'analyse, il met l'accent sur les techniques de majoration.

Le programme introduit le concept d'espace vectoriel normé et d'application linéaire continue, afin de fournir un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions et celle des suites et des séries de fonctions. La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle plane constitue un objectif essentiel. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, l'étude des équations différentielles (notamment des systèmes linéaires), l'étude des fonctions de plusieurs variables (en interaction étroite avec la géométrie différentielle) tiennent une place majeure.

### c) Secteur de l'algèbre et de ses interventions

Dans ce secteur, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (points de vue géométrique et matriciel), tandis que l'étude des anneaux et des corps ainsi que l'étude générale des groupes en ont été écartées. Il met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.

Le programme approfondit celui de première année (espaces vectoriels, applications linéaires, algèbres, dimension, rang, calcul matriciel, espaces vectoriels euclidiens, automorphismes orthogonaux du plan et de l'espace) et développe de nouveaux concepts (polynômes d'endomorphismes, valeurs propres et sous-espaces propres, réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel et des endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien, réduction des matrices).

d) *Secteur de la géométrie et de ses interventions*

Une vision géométrique des problèmes imprègne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie et les apports de son langage (figures, représentations graphiques, interprétations géométriques...) jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention.

e) *Articulation avec la physique, la chimie et les sciences industrielles*

En relation étroite avec les concepts propres à la physique, à la chimie et aux sciences industrielles, le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire et de la géométrie en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, trajectoires et lignes de niveau, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques...). Ces interprétations, conjointement avec les interprétations graphiques et géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse et de l'algèbre linéaire.

f) *Rôle de la pensée algorithmique*

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances. En mathématiques, aucune connaissance sur la théorie des algorithmes n'est exigible des étudiants.

Les algorithmes associés aux notions étudiées dans le programme de mathématiques sont mentionnés dans le texte même du programme ou dans les travaux pratiques. En outre, de nombreux travaux pratiques donnent lieu à l'exploitation du logiciel de calcul symbolique et formel étudié dans le programme d'informatique.

g) *Emploi des calculatrices*

Cet emploi est défini par la réglementation en vigueur. Les étudiants doivent savoir utiliser une calculatrice programmable dans les situations liées au programme de la classe et de la discipline considérées. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles :

- savoir effectuer des opérations arithmétiques sur les nombres réels et savoir comparer deux nombres réels ;
- savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme de la classe considérée et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches ;
- savoir programmer une instruction séquentielle, une instruction conditionnelle et une instruction itérative comportant éventuellement un test d'arrêt.

### 3) **Conception et organisation de la formation**

a) *Organisation du travail de la classe*

On ne saurait se borner à l'exposé, si parfait soit-il, de théories éventuellement suivies d'applications ; il convient au contraire de centrer l'enseignement autour de l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques. En particulier, il est essentiel que l'approfondissement théorique ne soit coupé ni des problématiques qui le sous-tendent, ni des secteurs d'intervention qui le mettent en jeu. Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :

- Promouvoir l'acquisition de méthodes et entraîner les étudiants à exploiter toute la richesse de la démarche mathématique ; la classe est donc un lieu de découverte et d'exploitation de problématiques, un lieu d'analyse des phénomènes et des concepts, un lieu de réflexion et de débats sur l'architecture des contenus, les démarches suivies, les hypothèses d'un théorème, la portée des concepts mis en jeu et des résultats obtenus. Elle est aussi un lieu d'élaboration de synthèses ayant pour triple objectif de dégager clairement les idées et méthodes essentielles, de préciser leur portée pour la résolution de problèmes et, inversement, d'identifier les principales méthodes dont on dispose pour étudier un type donné de problème. Dans cette perspective, les enseignements combinent de façon organique la formulation et l'analyse de problèmes, l'élaboration de concepts, la présentation, la démonstration et la mise en œuvre de résultats, ainsi que la mise en valeur de méthodes.

- Développer les capacités de communication. La pertinence des indications écrites et orales données par le professeur et la qualité de structuration des échanges interpersonnels jouent ici un rôle essentiel : qualités d'écoute et d'expression orale (formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée...), qualités de lecture et d'expression écrite (maîtrise du tableau, prise de notes, analyse d'un énoncé, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement...). La communication utilise des moyens diversifiés : non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément important, mais aussi le rétroprojecteur, l'ordinateur connecté à un dispositif de projection approprié.

b) *Organisation du travail personnel des étudiants*

Les travaux effectués en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, ont une importance capitale ; leurs fonctions sont diversifiées :

- L'étude du cours joue un rôle central. Son objectif est triple ; connaître les concepts et les résultats essentiels, acquérir la maîtrise des méthodes d'étude des problèmes, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, les démarches et les techniques de raisonnement mises en jeu dans les démonstrations. L'étude du cours est donc indissociable de celle des problèmes.
- La résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, a pour fonction d'affermir les connaissances de base des étudiants et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples. La résolution de tels exercices n'est donc pas un objectif en soi, et tout excès de technicité doit être évité. La maîtrise de ce type de questions est une exigence valable pour l'ensemble des étudiants.
- L'étude de questions plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux étudiants d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances de façon coordonnée. Au sein d'une même classe, les thèmes d'étude peuvent être diversifiés en fonction du projet de formation des étudiants.
- Les travaux individuels de rédaction en temps libre (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à développer les capacités d'expression écrite et de mise au point d'un raisonnement. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. Ces travaux de rédaction doivent donc être fréquents, mais leur longueur doit rester raisonnable. Leur contenu peut être diversifié en fonction du projet de formation des étudiants.
- Les épreuves écrites en temps limité ont pour objectif principal de préparer les étudiants aux épreuves écrites des concours. Les connaissances exigibles dans ces épreuves ne doivent en aucun cas dépasser celles qui figurent au programme ; si d'autres connaissances sont à mettre en œuvre, toutes les indications utiles doivent être fournies aux étudiants. Quand il s'agit d'épreuves de concours de longueur importante, le barème doit en tenir compte. En première période des classes de première année, ces épreuves doivent être de taille raisonnable et de difficulté progressive, afin de ne pas décourager les étudiants et de leur permettre de rédiger clairement une solution.
- La recherche et l'exploitation (individuelle ou en équipe) de documents scientifiques contribue au développement des capacités d'autonomie. Elle permet aussi de développer l'ouverture d'esprit, grâce à la prise de connaissance de points de vue diversifiés sur une même question, et les capacités d'analyse et de synthèse, grâce à une étude comparée de ces points de vue. Elle permet enfin aux étudiants d'approfondir leurs connaissances en complément des travaux menés en classe ou en fonction de leurs centres d'intérêt et de leur projet de formation.
- La préparation et la mise en œuvre d'exposés vise à développer les capacités d'organisation de la pensée et les qualités d'expression orale.

#### c) *Évaluation et notation des étudiants*

La communication des objectifs à atteindre et la mise en œuvre de formes diversifiées d'évaluation peuvent aider de manière efficace les étudiants à progresser, à se situer et à affiner un choix d'orientation.

La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important ; ce calibrage doit être établi en relation avec les performances attendues des étudiants des classes de première année en début de seconde année ou celles attendues des étudiants de seconde année dans les épreuves de concours. Il convient d'éviter tant la surnotation, génératrice d'illusion, que la sousnotation, génératrice de découragement.

#### d) *Interprétation et délimitation des programmes*

Pour chacune des classes, les connaissances et les capacités exigibles des étudiants sont indiquées avec précision, de façon à combattre l'inflation théorique autant que l'excès de technicité. Il importe de souligner la nécessité impérieuse de respecter les limites du programme, tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation. Un encyclopédisme relayé par la pratique du bachotage irait totalement à l'encontre du but recherché, qui tend à privilégier une formation de l'esprit scientifique fondée sur l'approfondissement d'un noyau limité de connaissances fondamentales. Il importe que cet état d'esprit trouve sa traduction dans les sujets des épreuves d'évaluation.

## II PROGRAMME DES CLASSES PSI ET PSI\*

### AVERTISSEMENT

#### 1) Organisation du texte des programmes

Ce texte est organisé en deux titres : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie. Chacun de ces titres comporte des parties (numérotées I, II, ...), elles-mêmes subdivisées en chapitres (numérotés 1, 2, ...), puis en paragraphes (repérés a, b, ...). Chacune des parties comporte :

- En tête de partie ou de chapitre, un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à cette partie ou à ce chapitre.
- Pour chaque paragraphe, un texte présenté en deux colonnes ; à gauche sont fixées les connaissances et les méthodes figurant au programme, à droite un commentaire indique les exemples fondamentaux à connaître et les méthodes à maîtriser, précise le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repère le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres parties du programme.
- En fin de partie, des travaux pratiques, qui sont de deux sortes : les uns, dont l'énoncé commence par la locution "Exemples de ...", indiquent le champ des questions mathématiques à étudier, soit dans le cadre du temps d'enseignement, soit dans celui du travail personnel des étudiants ; les autres fixent les méthodes et les techniques que les étudiants doivent connaître et savoir mettre en œuvre. Les travaux pratiques sont également présentés en deux colonnes ; à gauche figurent leurs énoncés, à droite un commentaire indique des repères pour le niveau d'approfondissement à donner à leur étude. Enfin, les travaux pratiques qui doivent donner lieu à l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel étudié en informatique sont repérés par le signe §.

#### 2) Connaissances et capacités exigibles des étudiants

Le programme de mathématiques de la filière Physique et Sciences de l'Ingénieur comporte conjointement celui des classes de seconde année PSI et PSI\*, fixé par le présent texte, et celui de la classe de première année PCSI, fixé par l'arrêté du 3 Juillet 1995, publié au B.O.E.N. hors série du 20 Juillet 1995, volume 2.

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, exemples, contre-exemples, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mise en œuvre de ces connaissances, le texte du programme délimite de manière précise trois catégories.

a) *Celles qui sont exigibles des étudiants* : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents paragraphes, des points qui sont repérés comme tels dans la colonne de droite ou dans les bandeaux, et des travaux pratiques non repérés par la mention "Exemples de ...". Les démonstrations des résultats concernés sont exigibles des étudiants, sauf mention expresse du contraire.

Enfin, aucun développement ne doit être donné aux notions figurant au programme lorsqu'elles sont uniquement repérées par la locution "définition de ..." ; seule cette définition est alors exigible des étudiants.

b) *Celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants* : il s'agit de tous les travaux pratiques dont l'énoncé commence par la locution "Exemples de ..." et des points repérés dans les bandeaux ou dans la colonne de droite par la locution "aucune connaissance spécifique sur ... n'est exigible des étudiants". Lorsqu'une épreuve d'évaluation fait intervenir de telles connaissances ou de telles capacités, toutes les indications utiles doivent être fournies aux étudiants.

En ce qui concerne les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérés dans la colonne de droite par la locution "la démonstration n'est pas exigible des étudiants", le professeur peut, suivant les cas, démontrer en détail le résultat considéré, indiquer l'idée de sa démonstration ou l'admettre.

c) *Celles qui sont indiquées comme étant "hors programme"* dans les bandeaux ou dans la colonne de droite. Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation.

En particulier, la locution "la démonstration est hors programme" signifie qu'il est demandé d'admettre le résultat ; aucune épreuve d'évaluation ne peut comporter une telle démonstration.

Enfin, lorsqu'une question est repérée dans les bandeaux par la locution "En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient ... mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants", aucune épreuve d'évaluation en mathématiques ne peut porter sur cette question.

## ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes, projecteurs ; bases, dimension et rang ; valeurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme. Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.

La maîtrise de l'algèbre linéaire en dimension finie et, notamment, de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel, constitue un objectif essentiel. Le programme combine, de façon indissociable, l'étude des concepts de l'algèbre linéaire avec celle des problèmes linéaires (indépendance linéaire, équations linéaires, réduction des endomorphismes et des matrices, approximation des fonctions, propriétés des configurations et des transformations géométriques...).

Le programme d'algèbre et géométrie comporte l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques issus de l'algèbre linéaire ainsi que l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel.

### I. ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE AFFINE

Le programme est organisé autour de quatre objectifs.

- Consolider les acquis de la classe de première année : étude des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs, algèbres) ; étude des concepts fondamentaux relatifs aux espaces vectoriels de dimension finie (bases, dimension, rang, calcul matriciel) et à la géométrie affine du plan et de l'espace (sous-espaces affines, barycentres).

- Étudier de nouveaux concepts : somme directe de sous-espaces vectoriels, trace et déterminant d'un endomorphisme.

- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes linéaires issus de l'algèbre (étude des systèmes linéaires, des polynômes, des algèbres ; interpolation, équations aux différences finies) et de l'analyse (réurrences linéaires et équations différentielles linéaires).

- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires) et le point de vue matriciel.

Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

Dans cette partie, le corps de base  $\mathbf{K}$  est  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

#### 1- Espaces vectoriels ; applications linéaires

##### a) Somme directe de sous-espaces vectoriels

Somme directe de sous-espaces vectoriels : définition de la somme  $\sum E_i$  d'une famille finie  $(E_i)_{i \in I}$  de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  ; définition d'une somme directe  $\oplus E_i$  d'une telle famille. Cas des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Lorsque  $E$  est de dimension finie et que la somme  $\sum E_i$  est directe,

$$\dim \oplus_i E_i = \sum_i \dim E_i.$$

Lorsque  $E = \oplus E_i$  alors, pour toute famille  $u_i$  d'applications linéaires de  $E_i$  dans un espace vectoriel  $F$ , il existe une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  et une seule telle que, pour tout  $i$ ,  $u_i$  soit la restriction de  $u$  à  $E_i$ .

Définition d'une base d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$ , à une décomposition en somme directe  $E = \oplus E_i$ .

Dans l'espace vectoriel  $\mathbf{K}[X]$ , le sous-espace vectoriel  $\mathbf{K}[X]P$  constitué des multiples d'un polynôme  $P$  de degré  $n + 1$  admet pour sous-espace supplémentaire le sous-espace vectoriel  $\mathbf{K}_n[X]$  constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Alors, pour que  $E = \oplus E_i$ , il faut et il suffit que

$$\dim E = \sum_i \dim E_i.$$

Famille  $(p_i)$  de projecteurs de  $E$  associée à une décomposition  $E = \oplus E_i$  ; relations  $p_i^2 = p_i$ ,  $p_i p_j = 0$  si  $j \neq i$  et  $\mathbf{I}_E = \sum p_i$ .

**b) Image et noyau d'une application linéaire**

Une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  définit un isomorphisme de tout supplémentaire  $E'$  de  $\text{Ker } u$  sur  $\text{Im } u$ .

Application à l'interpolation de Lagrange : détermination des polynômes  $P$  prenant des valeurs données sur une famille  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  d'éléments de  $\mathbf{K}$  distincts deux à deux.

Étant donné un sous-espace vectoriel  $E'$  de  $E$  et deux sous-espaces supplémentaires  $F_1$  et  $F_2$  de  $E'$  dans  $E$ , le projecteur de  $E$  sur  $F_1$  parallèlement à  $E'$  définit un isomorphisme de  $F_2$  sur  $F_1$ .

Lorsque  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, relation

$$\dim \text{Im } u + \dim \text{Ker } u = \dim E.$$

Définition de l'espace dual  $E^*$  d'un espace vectoriel  $E$ .

Définition d'un hyperplan  $H$  de  $E$ . Étant donnée une forme linéaire  $\varphi$  sur  $E$  non nulle, le sous-espace vectoriel  $H = \text{Ker } \varphi$  est un hyperplan de  $E$ ; toute forme linéaire  $\psi$  nulle sur  $H$  est colinéaire à  $\varphi$ .

Étant donné un vecteur  $e$  non nul d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, il existe une forme linéaire  $\varphi$  sur  $E$  telle que  $\varphi(e) = 1$ .

Formes linéaires coordonnées  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  associées à une base  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$ . Les formes linéaires coordonnées constituent une base  $B^*$  de  $E^*$ , appelée base duale de  $B$ . La dimension de  $E^*$  est égale à  $n$ .

**c) Trace d'un endomorphisme**

Trace d'une matrice carrée; linéarité de la trace, relations  $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$ ,  $\text{Tr } PMP^{-1} = \text{Tr } M$ . Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Soit  $u$  l'application de  $\mathbf{K}[X]$  dans  $\mathbf{K}^{n+1}$  définie par  $u(P) = (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$ . Le noyau de  $u$  est constitué des multiples du polynôme  $N = \prod (X - a_j)$ ; en outre,  $u$  définit un isomorphisme de  $\mathbf{K}_n[X]$  sur  $\mathbf{K}^{n+1}$ .

Caractérisation des isomorphismes à l'aide du rang. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme.

Équations d'un hyperplan.

Le vecteur nul est le seul vecteur de  $E$  sur lequel toute forme linéaire s'annule.

Dans ces conditions,  $B$  et  $B^*$  vérifient les relations d'orthogonalité de Kronecker

$$\varphi_i(e_j) = \delta_i^j$$

où  $\delta_i^j = 1$  si  $j = i$  et  $\delta_i^j = 0$  sinon.

Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

**2- Déterminants**

*Le groupe symétrique est introduit en relation avec la notion de déterminant. Son étude n'est pas un objectif en soi.*

*Dans ce chapitre, les espaces vectoriels sont de dimension finie sur  $\mathbf{K}$ .*

**a) Groupe symétrique**

Définition du groupe  $\mathfrak{S}_n$  des permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ; cycles, transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions. Signature  $\varepsilon(\sigma)$  d'une permutation  $\sigma$ , signature d'une transposition.

L'application  $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$  est un morphisme de  $\mathfrak{S}_n$  dans le groupe multiplicatif  $\{-1, 1\}$ .

Aucune connaissance sur la décomposition en cycles n'est exigible des étudiants.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

**b) Déterminant de  $n$  vecteurs**

Formes  $n$ -linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension  $n$ . Déterminant de  $n$  vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension  $n$ . Caractérisation des bases.

La démonstration de l'existence du déterminant n'est pas exigible des étudiants.

Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer.

**c) Déterminant d'un endomorphisme**

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes; caractérisation des automorphismes.

Application à l'orientation d'un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3.

**d) Déterminant d'une matrice carrée**

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Développement par rapport à une ligne ou une colonne ; cofacteurs.

Relation

$$M \cdot {}^t \text{Com } M = {}^t \text{Com } M \cdot M = (\text{Det } M) I_n,$$

où  $\text{Com } M$  est la matrice des cofacteurs de  $M$ .  
Expression de l'inverse d'une matrice carrée.

**Travaux pratiques**

Exemples d'étude de l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs. Exemples de construction de bases et de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et d'emploi de bases, de supplémentaires, de sommes directes et de changements de bases, notamment pour l'étude des équations linéaires.

§ Exemples d'étude de problèmes d'interpolation linéaire.

§ Exemples d'étude de systèmes d'équations linéaires.

Il convient d'exploiter les espaces vectoriels d'endomorphismes, de matrices, de polynômes, de suites et de fonctions.

Il convient de valoriser les interventions en géométrie.

§ Emploi des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice à coefficients numériques pour la résolution des systèmes de Cramer par l'algorithme du pivot partiel, le calcul de déterminants, l'inversion des matrices.

**II. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES**

*Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :*

- Étudier les polynômes d'un endomorphisme  $u$  et les sous-espaces stables par  $u$ .
- Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres d'un endomorphisme, en dimension finie ou non.
- Étudier les endomorphismes diagonalisables et les endomorphismes trigonalisables, en dimension finie.
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

*En outre, le programme associe étroitement le point de vue géométrique et le point de vue matriciel.*

*Dans cette partie, le corps de base  $\mathbf{K}$  est  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .*

**1- Sous-espaces stables, polynômes d'un endomorphisme****a) Sous-espaces stables**

Définition d'un sous-espace vectoriel  $F$  stable par un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$ . Définition de l'endomorphisme de  $F$  induit par  $u$ .

Si  $E$  est de dimension finie, caractérisation des endomorphismes de  $E$  stabilisant un sous-espace vectoriel  $F$  par leur matrice dans une base de  $E$  adaptée à  $F$ .

Étant donné un espace vectoriel  $E$  de dimension finie et une famille  $(E_1, E_2, \dots, E_p)$  de sous-espaces vectoriels dont  $E$  est somme directe, caractérisation des endomorphismes stabilisant les sous-espaces  $E_j$  par leur matrice dans une base de  $E$  adaptée à cette décomposition. Déterminant d'un tel endomorphisme, d'une matrice diagonale par blocs.

Définition d'un drapeau  $(E_1, E_2, \dots, E_n)$  de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  ; caractérisation des endomorphismes stabilisant les sous-espaces  $E_j$  par leur matrice dans une base de  $E$  adaptée à ce drapeau.

Si les endomorphismes  $u$  et  $v$  commutent,  $\text{Im } u$  et  $\text{Ker } u$  sont stables par  $v$ .

Déterminant d'une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ .

Étant donnée une base d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, caractérisation géométrique des endomorphismes dont la matrice dans cette base est diagonale.

Étant donnée une base d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, caractérisation géométrique des endomorphismes dont la matrice dans cette base est triangulaire supérieure.

**b) Polynômes d'un endomorphisme**

La donnée d'un endomorphisme  $u$  de  $E$  définit un morphisme  $P \mapsto P(u)$  de l'algèbre  $\mathbf{K}[X]$  dans l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$ .

Pour tout élément  $P$  de  $\mathbf{K}[X]$ ,  $\text{Im } P(u)$  et  $\text{Ker } P(u)$  sont stables par  $u$ .



**c) Théorème de décomposition des noyaux**

Définition d'un idéal de l'anneau  $\mathbf{K}[X]$ ; structure des idéaux de  $\mathbf{K}[X]$ .

Noyau et image du morphisme  $P \mapsto P(u)$  de  $\mathbf{K}[X]$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . Idéal des polynômes annulateurs de  $u$ .

Théorème de décomposition des noyaux : si  $P$  et  $Q$  sont premiers entre eux,  $\text{Ker } PQ(u) = \text{Ker } P(u) \oplus \text{Ker } Q(u)$ .

Polynômes premiers entre eux; théorème de Bézout, théorème de Gauss.

Extension au cas d'une famille finie de polynômes premiers entre eux deux à deux.

**2- Réduction d'un endomorphisme**

*Aucune connaissance spécifique sur les méthodes de mise sous forme triangulaire n'est exigible des étudiants.*

**a) Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme**

Droites stables par un endomorphisme  $u$  d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Définition des valeurs propres, des vecteurs propres (le vecteur 0 n'est pas un vecteur propre), des sous-espaces propres  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda I_E)$  d'un endomorphisme  $u$  de  $E$ .

Si les endomorphismes  $u$  et  $v$  commutent, les sous-espaces propres  $E_\lambda(u)$  sont stables par  $v$ .

Toute famille de  $p$  vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.

Étant donné un endomorphisme  $u$  de  $E$  et un élément  $P$  de  $\mathbf{K}[X]$ , pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $u$ ,  $P(\lambda)$  est une valeur propre de  $P(u)$ . Si  $P(u) = 0$ , alors toute valeur propre  $\lambda$  de  $u$  est un zéro du polynôme  $P$ .

En dimension finie, automorphisme  $u \mapsto auu^{-1}$  de l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  défini par un élément  $a$  du groupe linéaire  $\text{GL}(E)$ .

La notion de valeur spectrale est hors programme.

En dimension finie,  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  si et seulement si  $u - \lambda I_E$  n'est pas inversible; l'ensemble des valeurs propres de  $u$  est alors appelé spectre de  $u$  et noté  $\text{Sp}(u)$ .

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est directe.

Éléments propres des homothéties, des projecteurs, des affinités, des symétries.

Relation entre les valeurs propres (les sous-espaces propres) de  $u$  et de  $auu^{-1}$ .

**b) Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée**

Définition des valeurs propres, des sous-espaces propres, des vecteurs propres et du spectre d'un élément  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . Un élément  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  peut être considéré comme élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ; le spectre de  $M$  dans  $\mathbf{R}$  est contenu dans le spectre de  $M$  dans  $\mathbf{C}$ .

Automorphisme  $M \mapsto PMP^{-1}$  de l'algèbre  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . Définition des matrices semblables; interprétation géométrique.

Les éléments propres de  $M$  sont définis comme étant ceux de l'endomorphisme  $u$  de  $\mathbf{K}^n$  canoniquement associé à  $M$ .

Spectre de deux matrices semblables.

**c) Polynôme caractéristique**

Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme  $u$  d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Ordre de multiplicité d'une valeur propre.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Lorsque ce polynôme est scindé, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

**d) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie**

Définition d'un endomorphisme  $u$  diagonalisable : l'espace vectoriel  $E$  est somme (directe) des sous-espaces propres  $E_\lambda(u)$ . Projecteurs  $p_\lambda$  associés; relation  $u = \sum_{\lambda} \lambda p_\lambda$ .

Inversement, si  $E$  est somme directe de sous-espaces vectoriels stables  $E_j$  sur lesquels  $u$  induit une homothétie, alors  $u$  est diagonalisable.

Un endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement s'il existe une base formée de vecteurs propres de  $u$ , ou encore s'il existe une base dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

Pour qu'un endomorphisme  $u$  de  $E$  soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $u$  soit égale à  $\dim E$ .

Pour qu'un endomorphisme  $u$  de  $E$  soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.

Définition d'un endomorphisme  $u$  trigonalisable : il existe une base telle que la matrice associée à  $u$  dans cette base soit triangulaire supérieure.

Définition d'une matrice carrée  $M$  diagonalisable, trigonalisable. Pour que  $M$  soit diagonalisable (resp. trigonalisable), il faut et il suffit que  $M$  soit semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure).

### Travaux pratiques

§ Exemples d'emploi du théorème de décomposition des noyaux (étude d'endomorphismes ou de matrices annulant un polynôme, recherche de bases de l'espace vectoriel des solutions d'une équation aux différences finies ou d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants).

§ Exemples d'emploi de décompositions en blocs (produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs).

§ Exemples de réduction à la forme diagonale de matrices carrées sur  $\mathbf{C}$  ou sur  $\mathbf{R}$ .

§ Exemples d'étude du comportement des puissances d'une matrice.

Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Si  $u$  est diagonalisable, pour tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  stable par  $u$ , l'endomorphisme de  $F$  induit par  $u$  l'est aussi.

Aucune connaissance spécifique sur la notion de sous-espace caractéristique n'est exigible des étudiants.

Lorsque  $M$  est diagonalisable,  $M$  s'écrit sous la forme  $PDP^{-1}$ , où  $D$  est diagonale et où  $P$  désigne la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbf{K}^n$  à une base de vecteurs propres de  $M$ . Cas des matrices trigonalisables.

Les étudiants doivent savoir déterminer les suites satisfaisant à une relation de récurrence  $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$ .

Pour les produits par blocs, il convient de se limiter aux matrices de la forme  $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ .

Il convient de donner quelques exemples de matrices non diagonalisables, mais aucune méthode générale de réduction à la forme triangulaire n'est exigible des étudiants.

## III. ESPACES EUCLIDIENS, GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :

- Consolider les acquis de la classe de première année sur le produit scalaire, les espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 et la géométrie euclidienne du plan et de l'espace.
- Étendre ces notions au cas des espaces euclidiens de dimension  $n$  ; étudier la réduction des endomorphismes autoadjoints et des formes bilinéaires symétriques dans une base orthonormale.
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs, endomorphismes autoadjoints, automorphismes orthogonaux) et le point de vue matriciel.
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

Il convient d'étudier conjointement les espaces vectoriels euclidiens et la géométrie euclidienne du plan et de l'espace et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

### 1- Espaces préhilbertiens réels ou complexes

L'objectif de ce chapitre est double :

- Consolider les notions de base abordées en classe de première année concernant le produit scalaire, la norme associée et l'orthogonalité ; introduire le concept de somme directe orthogonale.
- Étendre brièvement ces notions au cas du corps des complexes.

**a) Produit scalaire**

Produit scalaire sur un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel ; définition d'un espace préhilbertien réel. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distance associées.

Relation entre produit scalaire et norme, polarisation.

Produit scalaire  $(x, y) \mapsto (x|y)$  sur un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel (linéaire à droite, semi-linéaire à gauche) ; définition d'un espace vectoriel préhilbertien complexe. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distance associées. Relation

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x|y).$$

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, notamment le produit scalaire canonique de  $\mathbf{R}^n$  et les produits scalaires usuels sur les espaces de fonctions.

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, et notamment :

- le produit scalaire canonique de  $\mathbf{C}^n$  ;

-  $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_{[a,b]} \bar{f}g$  dans  $\mathcal{C}([a, b])$  ;

-  $(f, g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} \bar{f}g$  dans l'espace vectoriel  $\mathcal{C}_{2\pi}$  des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbf{R}$  à valeurs complexes.

**b) Orthogonalité**

Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal  $F^\circ$  (ou  $F^\perp$ ) d'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$ .

Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux. Somme directe orthogonale d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Extension des notions précédentes aux espaces préhilbertiens complexes.

Familles orthogonales, familles orthonormales ; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.

Projecteurs orthogonaux.

**2- Espaces euclidiens**

*Ce chapitre est organisé autour de quatre objectifs :*

- *Consolider les acquis de première année sur les espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 (bases orthonormales, automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales) et la géométrie euclidienne du plan et de l'espace (distances, angles, déplacements).*

- *Étendre au cas des espaces vectoriels euclidiens les notions de base orthonormale, de projection orthogonale, d'automorphisme orthogonal et de matrice orthogonale.*

- *Étudier de nouveaux concepts : adjoint d'un endomorphisme, endomorphismes autoadjoints, réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles, réduction des formes bilinéaires symétriques sur un espace euclidien.*

- *Étendre les notions de base orthonormale et de projection orthogonale au cas des espaces préhilbertiens complexes de dimension finie.*

**a) Bases orthonormales**

Définition d'un espace vectoriel euclidien : espace préhilbertien réel de dimension finie.

Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.

Isomorphisme de  $E$  sur l'espace dual  $E^*$ .

Expressions dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points.

Extension des notions précédentes au cas d'un espace vectoriel hermitien, c'est-à-dire d'un espace préhilbertien complexe de dimension finie.

Existence d'une base orthonormale adaptée à un drapeau.

Toute forme linéaire  $f$  sur un espace vectoriel euclidien  $E$  s'écrit de manière unique sous la forme  $f(x) = (a|x)$  où  $a$  est un vecteur de  $E$ .

### b) Projections orthogonales

Dans un espace préhilbertien réel  $E$  (de dimension finie ou non), l'orthogonal  $F^\circ$  d'un sous-espace vectoriel  $F$  de dimension finie est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonal de  $F$ ; définition de la projection orthogonale  $p_F(x)$  d'un vecteur  $x$  de  $E$  sur  $F$ . Lorsque  $E$  est de dimension finie,

$$\dim F^\circ + \dim F = \dim E \quad \text{et} \quad F^{\circ\circ} = F.$$

Définition de la distance  $d(x, F)$  d'un élément  $x$  de  $E$  à  $F$ . Expression de cette distance à l'aide de  $p_F(x)$ : la fonction qui, à tout élément  $z$  de  $F$  associe  $\|x - z\|$  atteint son minimum en un point et un seul, à savoir  $p_F(x)$ ; relation

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2.$$

Extension des notions précédentes au cas des espaces préhilbertiens complexes.

### c) Adjoint d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe, les espaces vectoriels considérés sont des espaces euclidiens.

Définition de l'adjoint  $u^*$  d'un endomorphisme  $u$  de  $E$  par la relation  $(u^*(x)|y) = (x|u(y))$ ; existence et unicité de l'adjoint. Matrice associée à  $u^*$  dans une base orthonormale.

Définition d'un endomorphisme autoadjoint (ou symétrique)  $u$  par la relation  $(u(x)|y) = (x|u(y))$ . Les endomorphismes autoadjoints constituent un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$ .

Définition d'un automorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien  $E$  (c'est-à-dire un automorphisme de  $E$  conservant le produit scalaire). Caractérisation à l'aide de la conservation de la norme.

Caractérisation d'un automorphisme orthogonal par l'image d'une (de toute) base orthonormale.

Définition du groupe orthogonal  $O(E)$ ; symétries orthogonales, réflexions.

Définition des matrices orthogonales et du groupe orthogonal  $O(n)$ .

Caractérisation des matrices orthogonales par leurs vecteurs colonnes.

Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint, d'un automorphisme orthogonal, à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale. Changement de base orthonormale.

Déterminant d'une matrice orthogonale, d'un automorphisme orthogonal; déterminant d'une réflexion.

### d) Réduction des endomorphismes autoadjoints

Soit  $u$  un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien  $E$ . Alors  $E$  est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de  $u$ ; en particulier,  $u$  est diagonalisable dans une base orthonormale.

Endomorphisme autoadjoint associé à une forme bilinéaire symétrique sur un espace euclidien  $E$ ; réduction de cette forme dans une base orthonormale de  $E$ .

Expression de  $p_F(x)$  lorsque  $F$  est muni d'une base orthonormale  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ :

$$p_F(x) = \sum_{j=1}^n (e_j|x) e_j.$$

Inégalité de Bessel :

$$\sum_{j=1}^n |(e_j|x)|^2 \leq \|x\|^2.$$

L'application  $u \mapsto u^*$  est un automorphisme involutif de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E)$ ; relation  $(uv)^* = v^*u^*$ .

Caractérisation par la relation  $u^* = u$ . Caractérisation des projecteurs orthogonaux par les relations  $p^2 = p$  et  $p^* = p$ .

Caractérisation des automorphismes orthogonaux par la relation  $u^*u = uu^* = I_E$ .

L'étude générale du groupe orthogonal est hors programme.

Les matrices orthogonales sont définies à partir de l'automorphisme de  $\mathbf{R}^n$  associé. Caractérisation des matrices orthogonales par l'une des relations

$${}^t M M = I_n \quad \text{ou} \quad M {}^t M = I_n.$$

La notion de rotation ne figure au programme qu'en dimensions 2 et 3.

Diagonalisation d'une matrice symétrique au moyen d'une matrice orthogonale.

*Travaux pratiques*

§ Exemples de construction et d'emploi de bases orthonormales et de supplémentaires orthogonaux. Orthonormalisation d'une famille libre par la méthode de Schmidt.

Exemples de calcul et d'emploi de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, de la distance à un tel sous-espace.

Exemples d'étude et d'emploi de suites de polynômes orthogonaux.

Exemples de réduction d'endomorphismes et de matrices en base orthonormale.

Recherche d'une équation réduite d'une conique définie par une équation cartésienne dans un repère orthonormal.

Il convient d'exploiter les espaces vectoriels  $\mathbf{R}^n$  et  $\mathbf{C}^n$  ainsi que les espaces vectoriels de polynômes, de suites et de fonctions.

Il convient notamment d'exploiter l'approximation des fonctions.

Aucune connaissance spécifique sur les propriétés des polynômes orthogonaux n'est exigible des étudiants.

Il convient de mettre en valeur les applications à l'analyse et à la géométrie euclidienne.

## ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de suite (ou de série) et de fonction, qui permettent de modéliser le comportement des phénomènes discrets et des phénomènes continus. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur.

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie. Ce cadre permet notamment de décrire et d'étudier les notions de limite et de continuité. Le programme comporte en outre une introduction à la notion de norme en dimension quelconque. Cette notion permet notamment de décrire les modes de convergence usuels des suites et des séries de fonctions. En revanche, l'étude systématique des espaces vectoriels normés n'est pas un objectif du programme.

La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle constitue un objectif essentiel. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, les équations différentielles (notamment les systèmes linéaires et les systèmes autonomes, en relation avec la géométrie différentielle) tiennent une place majeure. Le programme comporte en outre une introduction au calcul différentiel à plusieurs variables (également en interaction étroite avec la géométrie différentielle et l'analyse vectorielle).

Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle de problèmes quantitatifs. Il développe conjointement l'étude globale des suites et des fonctions et l'étude de leur comportement local ou asymptotique ; en particulier, il convient de mettre en valeur le caractère local des notions de limite, de continuité, de dérivabilité et de différentiabilité. Enfin, pour l'étude des solutions des équations, le programme associe les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact, les méthodes d'approximation et les algorithmes de mise en œuvre.

En analyse, les majorations et les encadrements jouent un rôle essentiel. Tout au long de l'année, il convient donc de dégager les méthodes usuelles d'obtention de majorations et de minorations : opérations sur les inégalités, emploi de la valeur absolue, du module ou d'une norme, emploi du calcul différentiel et intégral. Pour comparer des nombres, des suites ou des fonctions, on utilise systématiquement des inégalités larges (qui sont compatibles avec le passage à la limite), en réservant les inégalités strictes aux cas où elles sont indispensables.

En ce qui concerne l'usage des quantificateurs, il convient d'entraîner les étudiants à savoir les employer pour formuler de façon précise certains énoncés et leurs négations. En revanche, il convient d'éviter tout recours systématique aux quantificateurs. A fortiori, leur emploi abusif (notamment sous forme d'abréviations dans un texte) est exclu.

Le programme d'analyse et géométrie différentielle comporte l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques relatifs aux suites et aux fonctions, ainsi que l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel.

### I. SUITES ET FONCTIONS

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :

- Étudier les propriétés fondamentales des espaces vectoriels normés de dimension finie, en vue de fournir un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions.
- Étudier le comportement global et asymptotique d'une suite ou d'une fonction.
- Décrire et mettre en œuvre des algorithmes d'approximation d'un nombre ou d'un vecteur à l'aide de suites ou de séries et comparer leurs performances. Cette étude est menée en relation avec celle des fonctions et de l'algèbre linéaire, et avec les problèmes de mesure de grandeurs géométriques ou physiques.
- Exploiter les résultats de la théorie des fonctions pour l'étude de problèmes numériques (majorations d'expressions, problèmes d'optimisation, solutions d'équations numériques, ...).

#### 1- Normes et distances, suites

L'objectif est d'introduire les notions de norme sur un espace vectoriel réel ou complexe (de dimension finie ou non) et de suite convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé.

Définition d'une norme, notée  $x \mapsto \|x\|$  ou  $x \mapsto N(x)$ , sur un espace vectoriel  $E$  réel ou complexe ; distance associée, notée  $(x, y) \mapsto d(x, y)$ . Boules.

Norme  $x \mapsto \|x\| = (x|x)^{1/2}$  associée à un produit scalaire  $(x, y) \mapsto (x|y)$  sur un espace vectoriel réel ou complexe.

Suites convergentes, suites divergentes. Opérations algébriques sur les suites convergentes.

Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples issus de l'espace  $\mathbf{K}^n$ , des espaces de matrices et de fonctions. Les étudiants doivent connaître notamment les normes  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_\infty$  sur  $\mathbf{K}^n$  et sur l'espace vectoriel  $\mathcal{C}([a, b])$  des fonctions continues sur  $[a, b]$  à valeurs réelles ou complexes.

Définition d'une application  $k$ -lipschitzienne : composée d'applications lipschitziennes.

L'application  $x \mapsto \|x\|$  est 1-lipschitzienne.

Comparaison de deux normes  $N$  et  $N'$  sur  $E$  : pour que toute suite convergeant vers 0 au sens de  $N$  converge vers 0 au sens de  $N'$ , il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel  $\alpha > 0$  tel que  $N' \leq \alpha N$ . Normes équivalentes.

Les étudiants doivent savoir comparer notamment les normes usuelles mentionnées ci-dessus.

## 2- Espaces vectoriels normés de dimension finie

L'objectif de ce chapitre est triple :

- Étudier les propriétés fondamentales des espaces vectoriels normés de dimension finie (équivalence des normes, critère de Cauchy de convergence des suites et des séries).
- Étudier le comportement local et asymptotique d'une fonction, grâce aux concepts de limite et de continuité.
- Introduire quelques notions élémentaires sur la compacité.

L'équivalence des normes montre que de nombreux concepts importants sont indépendants du choix d'une norme : parties bornées, applications bornées, applications lipschitziennes ; parties ouvertes, parties fermées, limite et continuité d'une application ; suites convergentes, parties compactes, suites de Cauchy. Par conséquent, pour toutes ces notions, il est légitime de se placer dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie (sans préciser une norme particulière).

En ce qui concerne le comportement global et asymptotique d'une suite, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, convergence, divergence...) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, vitesse de convergence ou de divergence par comparaison aux suites de référence usuelles, accélération de convergence...).

De même, en ce qui concerne le comportement global et local (ou asymptotique) d'une fonction, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, existence de zéros, existence d'extrémums, existence de limites, continuité, dérivabilité...) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, comparaison aux fonctions de référence au voisinage d'un point...).

Les applications étudiées dans ce chapitre sont définies sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  de dimension finie sur  $\mathbf{R}$  ou sur  $\mathbf{C}$  et à valeurs dans un autre  $F$ .

Dans un souci d'unification, une propriété portant sur une fonction définie sur  $A$  est dite vraie au voisinage d'un point  $a$  si elle est vraie sur l'intersection de  $A$  avec une boule de centre  $a$  lorsque  $a$  est un point de  $E$  adhérent à  $A$ , avec un intervalle  $]c, +\infty[$  lorsque  $E = \mathbf{R}$  et  $a = +\infty$ , avec un intervalle  $] -\infty, c[$  lorsque  $E = \mathbf{R}$  et  $a = -\infty$ .

### a) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Sur un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , toutes les normes sont équivalentes.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

Définition d'une partie bornée, d'une application bornée.

Espace vectoriel normé  $\mathcal{B}(A, F)$  des applications bornées  $f$  de  $A$  dans  $F$  muni de la norme  $N_\infty(f) = \sup_x \|f(x)\|$ .

Pour qu'une suite  $(u_n)$  d'éléments d'un espace vectoriel normé  $E$  de dimension finie soit convergente, il faut et il suffit que ses coordonnées dans une base de  $E$  soient convergentes.

Les coordonnées de la limite sont alors les limites des coordonnées.

Définition d'une suite de Cauchy. Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes est convergente ; plus généralement, toute suite de Cauchy d'éléments de  $E$  est convergente.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants.

Relations de comparaison entre suites : domination et négligeabilité pour une suite  $(u_n)$  à valeurs vectorielles et une suite  $(\alpha_n)$  à valeurs réelles. Équivalence pour deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  à valeurs réelles ou complexes.

Notations  $u_n = O(\alpha_n)$ ,  $u_n = o(\alpha_n)$ ,  $u_n \sim v_n$ .

## b) Étude locale d'une application, continuité

Définition des parties ouvertes, des parties fermées. Réunion et intersection de parties ouvertes, de parties fermées.

Définition d'un point adhérent, d'un point intérieur à une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des parties fermées.

Limite d'une application : soit  $f$  une application d'une partie  $A$  de  $E$  à valeurs dans  $F$  et  $a$  un point de  $E$  adhérent à  $A$ . Étant donné un élément  $b$  de  $F$ , on dit que  $f$  admet  $b$  comme limite au point  $a$  si, pour tout nombre réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre réel  $\delta > 0$  tel que, pour tout élément  $x$  de  $A$ , la relation  $\|x-a\| \leq \delta$  implique la relation  $\|f(x)-b\| \leq \varepsilon$ ; le vecteur  $b$  est alors unique, et on le note  $b = \lim_a f$ , ou encore  $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Lorsqu'un tel élément  $b$  existe, on dit que  $f$  admet une limite au point  $a$ .

Limite d'une application composée; opérations algébriques sur les limites.

Limite de l'image d'une suite  $(u_n)$  admettant une limite  $a$  par une application  $f$  admettant une limite au point  $a$ .

Relations de comparaison en un point; domination et négligeabilité pour une fonction  $f$  à valeurs vectorielles et une fonction  $\varphi$  à valeurs réelles ne s'annulant pas en dehors du point.

Applications continues. Continuité de la composée de deux applications continues, de la restriction d'une application continue; opérations algébriques sur les applications continues. Caractérisation de la continuité à l'aide des coordonnées dans une base de  $F$ .

Image réciproque d'une partie ouverte, d'une partie fermée par une fonction  $f$  continue sur  $E$  à valeurs réelles ou complexes. En particulier, si  $f$  est à valeurs réelles, alors pour tout nombre réel  $\alpha$ , l'ensemble des points  $x$  tels que  $f(x) \geq \alpha$ , ou tels que  $f(x) = \alpha$ , est une partie fermée de  $E$ ; de même l'ensemble des points  $x$  tels que  $f(x) > \alpha$  est une partie ouverte de  $E$ .

## c) Continuité des applications linéaires

Toute application linéaire  $u$  d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$  de dimension finie dans un autre  $(F, N')$  est continue sur  $E$ .

Norme subordonnée aux normes  $N$  et  $N'$  d'une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  :

$$\|u\| = \sup_{N(x) \leq 1} N'(u(x)).$$

Si  $u$  et  $v$  sont des applications linéaires,

$$\|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|.$$

Si  $E$ ,  $F$  et  $G$  sont de dimension finie, toute application bilinéaire  $B$  de  $E \times F$  dans  $G$  est continue sur  $E \times F$ .

Continuité de l'application  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$  de  $\mathbf{K} \times E$  dans  $E$ , du produit scalaire sur un espace euclidien.

Les notions de voisinage d'un point, d'adhérence, d'intérieur et de frontière d'une partie, d'ouverts et de fermés relatifs à une partie sont hors programme.

Lorsque  $a$  appartient à  $A$ ,  $f$  est dite continue au point  $a$ ; alors,  $b = f(a)$ . Dans le cas contraire,  $f$  admet une limite en  $a$  si et seulement si  $f$  se prolonge par continuité en ce point.

Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, extension de cette définition lorsque  $a = +\infty$  ou  $a = -\infty$ .

Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, extension de la notion de limite lorsque  $b = +\infty$  ou  $b = -\infty$ .

Caractérisation d'une application admettant une limite à l'aide de ses coordonnées dans une base de  $F$ .

Caractérisation séquentielle de la continuité d'une application en un point.

Notations  $f = O(\varphi)$  et  $f = o(\varphi)$ .

Espace vectoriel  $\mathcal{C}(A, F)$  des applications continues de  $A$  dans  $F$ , algèbre  $\mathcal{C}(A)$  des fonctions à valeurs réelles ou complexes continues sur  $A$ .

Il convient de souligner l'intérêt de ces résultats pour démontrer qu'une partie est ouverte (ou fermée).

La caractérisation de la continuité par images réciproques des ouverts (des fermés) est hors programme.

Il existe un nombre réel  $k > 0$  tel que, pour tout  $x$ ,  $N'(u(x)) \leq k N(x)$ ; dans ces conditions,  $u$  est  $k$ -lipschitzienne.

Norme sur l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  associée à  $N$  et  $N'$ .

Norme sur l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  associée à  $N$ .

Il convient de mettre en valeur des inégalités du type  $\|B(x, y)\| \leq k \|x\| \|y\|$ .

Continuité de  $(u, v) \mapsto uv$  dans l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$ .



**d) Compacité**

Par définition, une partie compacte d'un espace vectoriel normé  $E$  de dimension finie est une partie fermée bornée.

Étant donnée une application continue  $f$  de  $A$  dans  $F$ , l'image par  $f$  d'une partie compacte de  $E$  incluse dans  $A$  est une partie compacte de  $F$ . Cas d'une fonction numérique continue sur un compact : existence d'extrémums.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants.

**3- Séries de nombres réels ou complexes**

L'objectif de ce chapitre est double :

- Étudier la convergence des séries de nombres réels positifs.
- Étudier les séries absolument convergentes de nombres réels ou complexes, à partir des résultats obtenus pour les séries de nombres réels positifs.

**a) Suites et séries**

Série  $\sum u_n$  associée à une suite  $(u_n)$  de nombres réels ou complexes, suite  $(s_p)$  des sommes partielles de cette série.

Définition d'une série convergente et de sa somme, notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ . Espace vectoriel des séries convergentes.

Caractérisation de la convergence d'une série de nombres complexes à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; majoration du reste.

Il convient de mettre en valeur et d'exploiter la correspondance bijective entre suites et séries.

Si la série  $\sum u_n$  converge,  $u_n$  tend vers 0 ; la réciproque est fautive.

Aucune autre connaissance spécifique sur les séries semi-convergentes n'est exigible des étudiants.

**b) Séries de nombres réels positifs**

Pour qu'une série  $\sum u_n$  de nombres positifs converge, il faut et il suffit que la suite  $(s_p)$  des sommes partielles soit majorée. Alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_p s_p = \sup_p s_p$ .

Théorème de comparaison des séries de nombres réels positifs : soient  $(u_n)$  et  $(\alpha_n)$  des suites de nombres réels positifs telles que  $u_n = O(\alpha_n)$  ; alors la convergence de  $\sum \alpha_n$  implique la convergence de  $\sum u_n$ .

Comparaison logarithmique : si, pour tout entier  $n$ ,  $u_n > 0$  et  $\alpha_n > 0$ , et si, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n},$$

alors  $u_n = O(\alpha_n)$ .

Convergence des séries géométriques de nombres réels positifs, convergence des séries de Riemann.

Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une série géométrique, à une série de Riemann.

Développement décimal d'un nombre réel positif.

Comparaison logarithmique à une série géométrique : règle de d'Alembert.

**c) Séries de nombres réels ou complexes**

Critère de Cauchy pour la convergence d'une série de nombres réels ou complexes.

Séries absolument convergentes (c'est-à-dire telles que  $\sum |u_n| < +\infty$ ). Toute série absolument convergente est convergente.

Série géométrique : la série  $\sum z^n$ , où  $z$  appartient à  $\mathbf{C}$ , est absolument convergente si et seulement si  $|z| < 1$  ; sa somme est alors égale à  $\frac{1}{1-z}$ .

En outre,  $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .

En outre, si  $|z| \geq 1$ , cette série diverge.

Série exponentielle : pour tout nombre complexe  $z$ , la série  $\sum \frac{z^n}{n!}$  est absolument convergente. Par définition,  $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ .

### 4- Suites et séries de fonctions

L'objectif de ce chapitre est de définir les modes usuels de convergence ponctuelle des suites et séries de fonctions (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout segment, convergence normale d'une série) et d'exploiter ces types de convergence pour étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite et l'approximation d'une fonction par des fonctions plus simples.

Il convient de souligner que, le plus souvent, la convergence simple ne suffit pas pour assurer la régularité de la limite d'une suite de fonctions. En revanche, l'étude systématique des différents modes de convergence des suites et des séries de fonctions n'est pas un objectif du programme.

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  et à valeurs réelles ou complexes.

#### a) Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale

Étant donnée une suite  $(f_n)$  de fonctions définies sur  $I$ , définition de la convergence simple sur  $I$ , de la convergence uniforme sur  $I$ ; convergence uniforme de  $(f_n)$  sur tout segment de  $I$ .

Définitions correspondantes pour une série de fonctions.

Soit  $a$  un point de  $I$ ; si  $(f_n)$  converge vers  $f$  uniformément sur  $I$  et si, pour tout  $n$ ,  $f_n$  est continue au point  $a$ , alors  $f$  l'est aussi.

Si  $(f_n)$  converge vers  $f$  uniformément sur tout segment de  $I$  et si, pour tout  $n$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$ ,  $f$  l'est aussi. Continuité de la somme d'une série de fonctions continues uniformément convergente sur tout segment de  $I$ .

Une série  $\sum f_n$  de fonctions réelles ou complexes définies sur  $I$  est dite normalement convergente sur  $I$  si la série numérique  $\sum \|f_n\|_\infty$  est convergente. Convergence normale sur tout segment de  $I$ .

Toute série  $\sum f_n$  normalement convergente sur  $I$  est absolument et uniformément convergente sur  $I$ .

Pour la convergence uniforme, le programme se limite aux fonctions bornées; cette convergence est définie à partir de la norme  $N_\infty$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{B}(I)$  des fonctions à valeurs complexes bornées sur  $I$ .

Extension de ce résultat au cas où  $a$  est une extrémité de  $I$  lorsque, pour tout  $n$ ,  $f_n$  admet une limite  $b_n$  en  $a$ .

La démonstration de ces résultats n'est pas exigible des étudiants.

Pour établir la convergence normale de  $\sum f_n$ , il convient d'utiliser une série numérique convergente  $\sum \alpha_n$  majorante, c'est-à-dire telle que, pour tout  $n$ ,  $\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$ .

$$\text{Alors, } N_\infty \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_\infty(f_n).$$

#### b) Approximation des fonctions d'une variable réelle

Définition d'une fonction  $\varphi$  en escalier sur  $[a, b]$ , d'une subdivision de  $[a, b]$  subordonnée à  $\varphi$ . Espace vectoriel des fonctions en escalier sur un segment.

Définition d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur un segment.

Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.

Approximation uniforme des fonctions continues sur un segment par des fonctions polynomiales. Approximation uniforme sur  $\mathbf{R}$  des fonctions continues périodiques par des polynômes trigonométriques (complexes).

Espace vectoriel des fonctions en escalier sur  $\mathbf{R}$  (par définition, ces fonctions sont nulles en dehors d'un segment).

Une fonction est dite continue par morceaux sur un intervalle quelconque si sa restriction à tout segment est continue par morceaux.

La démonstration des théorèmes de Weierstrass est hors programme.

### Travaux pratiques

Exemples d'obtention de majorations et de minorations d'expressions réelles ou du module d'expressions complexes; exemples d'emploi pour l'étude de suites et de fonctions.

§ Exemples d'étude du comportement global et asymptotique de suites de nombres réels, de nombres complexes. Exemples de méthodes d'accélération de convergence.

§ Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  et d'emploi d'une telle suite pour l'approximation d'un point fixe  $a$  de  $f$ .

Exemples d'espaces vectoriels normés de fonctions, d'endomorphismes et de matrices; exemples de comparaison de normes.

§ Exemples d'étude de séries de nombres réels ou complexes.

§ Exemples d'obtention et d'emploi d'approximations univoques de fonctions.

Il convient d'entraîner les étudiants à exploiter la comparaison aux suites de référence et à classer des ordres de grandeur.

Pour étudier la vitesse de convergence de  $u_n$  vers  $a$ , les étudiants doivent savoir exploiter le comportement local de  $f$  au voisinage de  $a$  et, notamment, une inégalité du type lipschitzien  $|f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$  où  $0 \leq k < 1$ , ou du type  $|f(x) - f(a)| \leq \lambda|x - a|^2$ .

## II. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE : DÉRIVATION ET INTÉGRATION

*Le programme est organisé autour de quatre objectifs :*

- *Consolider les acquis de première année concernant la dérivation et l'intégration des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes.*
- *Étendre ces résultats au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles.*
- *Étudier l'intégration et la dérivation des suites et séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes.*
- *Effectuer une étude élémentaire des fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.*

*Aussi bien pour l'étude locale que pour l'étude globale des fonctions, le programme combine de manière indissociable les outils du calcul différentiel et du calcul intégral.*

*Les fonctions étudiées dans cette partie sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  et à valeurs dans un espace vectoriel  $F$  de dimension finie sur  $\mathbf{R}$  ou sur  $\mathbf{C}$ .*

### 1- Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

*L'objectif de ce chapitre est double :*

- *Consolider les acquis de première année concernant la dérivation des fonctions à valeurs réelles ou complexes : dérivation en un point, propriétés globales des fonctions de classe  $C^k$ , fonctions convexes.*
- *Étudier la dérivation des fonctions à valeurs vectorielles.*

#### a) Dérivée en un point, fonctions de classe $C^1$

Définition de la dérivabilité d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  en un point  $a$  de  $I$  : dérivée, dérivée à gauche, à droite.

Définition de la dérivabilité d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$ , application dérivée; définition d'une application de classe  $C^1$  sur  $I$ .

Espace vectoriel  $C^1(I, F)$  des applications de classe  $C^1$  sur  $I$ , linéarité de la dérivation, dérivée d'une application de la forme  $u(f)$  où  $u$  est une application linéaire, dérivée d'une application de la forme  $B(f, g)$ , où  $B$  est une application bilinéaire.

Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction  $f$  à valeurs dans  $F$  à l'aide d'une base de  $F$ .

Cas d'une fonction  $f$  à valeurs complexes : pour que  $f$  soit de classe  $C^1$ , il faut et il suffit que  $\bar{f}$  le soit, ou encore que  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  le soient.

Caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions continues sur  $I$  et dérivables sur l'intérieur de  $I$ .

Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation cinématique et graphique de la notion de dérivée en un point.

Notations  $f'$ ,  $Df$ ,  $\frac{df}{dx}$ .

Lorsque  $F$  est un espace préhilbertien, dérivation du produit scalaire  $(f|g)$ , du carré de la norme  $\|f\|_2$ ; lorsque  $e$  est un vecteur unitaire, orthogonalité de  $e$  et de  $De$ .

Les coordonnées de  $Df$  sont les dérivées des coordonnées de  $f$ .

Dans ces conditions,

$$D(\bar{f}) = \overline{Df}, \quad Df = D(\operatorname{Re} f) + iD(\operatorname{Im} f).$$

### b) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Définition des applications de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un intervalle  $I$  ( $k$  entier naturel ou  $k = +\infty$ ).

Espace vectoriel  $\mathcal{C}^k(I, F)$  des applications de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  à valeurs dans  $F$ , où  $0 \leq k \leq +\infty$ . Algèbre  $\mathcal{C}^k(I)$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  à valeurs réelles ou complexes.

La composée  $f \circ \varphi$  d'une application  $f$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et d'une fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un intervalle  $J$  à valeurs dans  $I$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $J$ .

Définition d'un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de  $J$  sur  $I$  ( $k \geq 1$ ).

Notations  $f^{(k)}$ ,  $D^k f$ ,  $\frac{d^k f}{dx^k}$ .

Dérivée  $k$ -ième du produit de deux fonctions (formule de Leibniz).

Une fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un intervalle  $J$  ( $k \geq 1$ ) est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de  $J$  sur  $I = \varphi(J)$  si et seulement si, pour tout élément  $t$  de  $J$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$ .

### c) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux

Une application  $f$  à valeurs dans  $F$  est dite de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux sur un segment  $[a, b]$ , où  $1 \leq k \leq +\infty$ , s'il existe une subdivision  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  telle que la restriction de  $f$  à chacun des intervalles  $]a_i, a_{i+1}[$  soit prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $[a_i, a_{i+1}]$ .

Les dérivées successives de  $f$  sont définies sur  $[a, b]$  privé d'une partie finie; elles sont notées  $D^j f$ .

Si  $f$  est continue sur  $I$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $I$ ,  $f$  est constante si et seulement si  $Df = 0$ .

Une fonction  $f$  est dite de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux sur un intervalle  $I$  quelconque si sa restriction à tout segment est de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux.

Il convient de mettre en valeur le cas usuel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et  $\mathcal{C}^{k+1}$  par morceaux sur  $I$ .

## 2- Intégration sur un segment des fonctions à valeurs vectorielles

L'objectif de ce chapitre est triple :

- Consolider les acquis de première année concernant l'intégration des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
- Étendre la notion d'intégrale aux fonctions à valeurs vectorielles continues par morceaux sur un segment.
- Étudier l'intégration sur un segment des suites et séries de fonctions continues, en introduisant les convergences en moyenne et en moyenne quadratique et en les comparant à la convergence uniforme.

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment  $J = [a, b]$  à valeurs dans un espace vectoriel  $F$  de dimension finie sur  $\mathbf{R}$  ou sur  $\mathbf{C}$ . La notion de fonction intégrable au sens de Riemann est hors programme.

### a) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition de l'intégrale d'une application  $\varphi$  en escalier sur un segment  $J$ . Notations  $\int_J \varphi$ ,  $\int_{[a,b]} \varphi$ . Linéarité de l'intégrale. Image de l'intégrale par une application linéaire.

Définition de l'intégrale d'une application  $f$  continue par morceaux sur un segment  $J$ . Notations  $\int_J f$ ,  $\int_{[a,b]} f$ . Linéarité de l'intégrale. Invariance de l'intégrale par translation.

Pour les fonctions à valeurs réelles, positivité et croissance de l'intégrale.

Image de l'intégrale par une application linéaire. Expression de l'intégrale à l'aide d'une base de  $F$ .

Les intégrales de deux fonctions continues par morceaux coïncident sauf sur une partie finie de  $J$  sont égales.

Si  $K$  est un segment contenu dans  $J$ ,  $\int_K f = \int_J \chi_K f$  où  $\chi_K$  est la fonction caractéristique de  $K$ .

Inégalité  $\|\int_J \varphi\| \leq \int_J \|\varphi\|$ .

Inégalité  $\|\int_J f\| \leq \int_J \|f\|$ .

Une fonction  $f$  continue et à valeurs positives sur un segment  $[a, b]$  est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Pour une fonction  $f$  à valeurs complexes, intégrale de  $\bar{f}$ , de  $\operatorname{Re} f$ , de  $\operatorname{Im} f$ .

Définition de l'intégrale d'une fonction  $f$  définie sur un segment  $[a, b]$  privé d'une subdivision  $S = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$ , lorsque la restriction de  $f$  à chacun des intervalles ouverts  $]a_j, a_{j+1}[$  est prolongeable en une fonction continue sur  $[a_j, a_{j+1}]$ .

Additivité de l'intégrale par rapport à l'intervalle d'intégration.

Valeur moyenne d'une fonction. Inégalité de la moyenne

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\| \leq (b-a) \sup_{[a,b]} \|f\|.$$

Étant donnée une application  $f$  continue par morceaux sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$ , définition de  $\int_a^b f(t) dt$ , où  $a$  et  $b$  appartiennent à  $I$ .

## b) Intégration sur un segment des suites de fonctions continues

Norme de la convergence en moyenne  $f \mapsto N_1(f) = \int_{[a,b]} |f|$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{C}([a,b])$  des fonctions continues sur  $[a,b]$  à valeurs complexes. La convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $[a,b]$  implique la convergence en moyenne et, en outre,

$$\int_{[a,b]} \lim_n f_n = \lim_n \int_{[a,b]} f_n.$$

Intégration terme à terme d'une série d'applications continues : soit  $(f_n)$  une suite d'applications continues sur  $[a,b]$ . Si la série  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[a,b]$ , la série des intégrales est convergente et

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

Produit scalaire  $(f, g) \mapsto \int_{[a,b]} \bar{f}g$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{C}([a,b])$  des fonctions continues sur  $[a,b]$  à valeurs complexes ; inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme de la convergence en moyenne quadratique  $f \mapsto N_2(f) = (\int_{[a,b]} |f|^2)^{1/2}$ . La convergence uniforme de  $(f_n)$  sur  $[a,b]$  implique la convergence en moyenne quadratique, qui implique elle-même la convergence en moyenne.

## 3- Dérivation et intégration

L'objectif de ce chapitre est triple :

- Étendre aux fonctions à valeurs vectorielles le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, et exploiter ce théorème pour l'étude globale des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux (théorème des accroissements finis) et pour les fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux (formules de Taylor, théorème de relèvement).
- Étudier la primitivation des suites et séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes et appliquer les résultats obtenus à leur dérivation.
- Effectuer une étude élémentaire des fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  et à valeurs dans un espace vectoriel  $F$  de dimension finie sur  $\mathbf{R}$  ou sur  $\mathbf{C}$ .

### a) Primitives et intégrale d'une fonction continue

Définition d'une primitive  $g$  d'une application  $f$  continue sur un intervalle  $I$ .

Deux primitives d'une même application diffèrent d'une constante.

Théorème fondamental : étant donné une application  $f$  continue sur  $I$  et un point  $a$  de  $I$ ,

Les étudiants doivent savoir effectuer des majorations analogues pour des intégrales de la forme  $\int_{[a,b]} B(f, g)$ , où  $B$  est une application bilinéaire. En revanche, toute formule ou égalité dite de la moyenne est hors programme.

Linéarité. Inégalité de la moyenne. Relation de Chasles.

Inégalités

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq N_1(f) \leq (b-a) N_\infty(f).$$

Lorsque la convergence est normale sur  $[a,b]$ , la série  $\sum N_1(f_n)$  est convergente et

$$N_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n).$$

Inégalités

$$N_2(f) \leq \sqrt{b-a} N_\infty(f),$$

$$N_1(f) \leq \sqrt{b-a} N_2(f).$$

Extension de cette définition au cas où  $f$  est continue par morceaux sur  $I$  :  $g$  est continue sur  $I$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $I$  et, en tout point de continuité de  $f$ ,  $g'(x) = f(x)$ .

- L'application  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$  ; pour toute primitive  $h$  de  $f$  sur  $I$ ,

$$\int_a^x f(t) dt = h(x) - h(a).$$

- Pour toute application  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt.$$

Formule d'intégration par parties pour des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

Changement de variable : étant données une fonction  $f$  continue sur  $I$  à valeurs dans  $F$  et une fonction  $\varphi$  à valeurs dans  $I$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[\alpha, \beta]$ ,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

Extension au cas où  $f$  est continue par morceaux sur  $I$ , lorsque  $\varphi$  est strictement monotone sur  $[\alpha, \beta]$ .

**b) Étude globale des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$**

Inégalité des accroissements finis : soit  $f$  une application continue sur  $[a, b]$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]a, b[$ . Si, pour tout élément  $t$  de  $]a, b[$ ,  $\|f'(t)\| \leq \lambda$ , alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda(b - a).$$

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]a, b[$  et si  $f'$  a une limite finie en  $a$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ .

**c) Formules de Taylor**

Pour une application  $f$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  par morceaux sur  $I$ , formule de Taylor à l'ordre  $k$  en un point  $a$  de  $I$  : expression intégrale du reste  $R_k$ . Majoration du reste  $R_k$  (inégalité de Taylor-Lagrange).

Développement limité d'une primitive d'une application continue ; application au développement limité de la dérivée d'une application de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**d) Théorème de relèvement**

L'application  $\theta \mapsto e^{i\theta}$  définit une bijection continue de  $] - \pi, \pi[$  sur  $\mathbf{U}$  privé de  $-1$ , dont l'application réciproque  $u \mapsto \text{Arg } u$  est continue ; relation

$$\text{Arg } u = 2 \text{Arctg } \frac{y}{1+x} \text{ où } u = x+iy, x^2 + y^2 = 1, x \neq -1.$$

Théorème de relèvement d'une application de classe  $\mathcal{C}^k$  à valeurs dans  $\mathbf{U}$ , où  $k \geq 1$ .

Extension au cas où  $f$  est continue par morceaux sur  $I$ .

Extension au cas où  $f$  est continue sur  $I$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $I$ .

Extension aux fonctions continues sur  $I$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $I$ .

Il convient de mettre en valeur l'intérêt de changements de variable affines, notamment pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener, par paramétrage du segment  $[a, b]$ , au cas où l'intervalle d'intégration est  $[0, 1]$  ou  $[-1, 1]$ .

Les étudiants doivent connaître l'interprétation cinématique de ce résultat.

Extension au cas où  $f$  est continue sur  $I$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $[a, b]$ .

Extension aux applications de classe  $\mathcal{C}^k$  : si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $]a, b[$  et si, pour tout  $r \in [1, k]$ ,  $D^r f$  admet une limite finie en  $a$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $[a, b]$ .

Décomposition  $f(x) = T_k(x) + R_k(x)$ , où

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^k \frac{(x-a)^n}{n!} D^n f(a).$$

Existence d'un développement limité à l'ordre  $k$  pour une application de classe  $\mathcal{C}^k$  : formule de Taylor-Young.

Lorsque  $u$  tend vers  $-1$  en restant tel que  $\text{Im } u > 0$  (resp.  $\text{Im } u < 0$ ),  $\text{Arg } u$  admet pour limite  $\pi$  (resp.  $-\pi$ ). En particulier, l'application  $u \mapsto \text{Arg } u$  ne se prolonge pas en une application continue sur  $\mathbf{U}$ .

Le cas des fonctions continues est hors programme.

### e) Suites et séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  et à valeurs réelles ou complexes.

Dérivation de la limite d'une suite de fonctions : soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  à valeurs réelles ou complexes convergeant simplement sur  $I$  vers  $f$  et telle que  $(f'_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers  $g$ . Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $f' = g$ . Extension aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Soit  $a$  un point de  $I$ ,  $(f_n)$  une suite de fonctions continues sur  $I$  à valeurs réelles ou complexes et, pour tout  $n$ ,  $h_n$  la primitive de  $f_n$  sur  $I$  telle que  $h_n(a) = 0$ . Si  $(f_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers  $f$ , alors  $(h_n)$  converge uniformément sur tout segment de  $I$  vers la primitive  $h$  de  $f$  telle que  $h(a) = 0$ .

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  à valeurs réelles ou complexes. Si la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  et si la  $\sum f'_n$  convergent uniformément sur tout segment de  $I$ , alors la somme de la série  $\sum f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et

Extension aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ .

$$D \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} D f_n.$$

L'application  $e_z : t \mapsto \exp tz$ , où  $z$  est un nombre complexe, est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}$  et  $De_z = z e_z$ .

### f) Intégrales dépendant d'un paramètre

Continuité sous le signe  $\int$  : soit  $f$  une fonction à valeurs réelles ou complexes continue sur  $A \times [a, b]$ , où  $A$  est un intervalle de  $\mathbf{R}$ . Alors la fonction  $g$  définie sur  $A$  par la relation  $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$  est continue sur  $A$ .

La démonstration des résultats de ce paragraphe n'est pas exigible des étudiants.

Dérivation sous le signe  $\int$  (formule de Leibniz) : lorsque  $f$  est continue sur  $A \times [a, b]$  et admet une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$  continue sur  $A \times [a, b]$ , alors  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$ , et

Extension aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ .

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Intégration sous le signe  $\int$  (formule de Fubini) : lorsque  $f$  est continue sur  $A \times [a, b]$ , alors pour tout segment  $[c, d]$  inclus dans  $A$

La formule de Fubini est à relier à la notion d'intégrale double.

$$\int_c^d \left[ \int_a^b f(x, t) dt \right] dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, t) dx \right] dt.$$

### 4- Intégration sur un intervalle quelconque

Ce chapitre est organisé autour de quatre objectifs :

- Étudier l'intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle, d'abord dans le cas des fonctions à valeurs positives, puis dans le cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
- Étudier les suites et séries de fonctions intégrables, grâce aux théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée, qui constituent des outils puissants.
- Appliquer les résultats obtenus à l'étude des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.
- Exploiter la représentation des fonctions par des séries et des intégrales, en relation avec l'enseignement des autres disciplines scientifiques.

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  à valeurs réelles ou complexes.

#### a) Fonctions intégrables à valeurs positives

Une fonction  $f$  à valeurs réelles positives continue par morceaux sur un intervalle  $I$  est dite intégrable (ou sommable) sur  $I$  s'il existe un nombre réel positif  $M$  tel que, pour tout segment  $J$  contenu dans  $I$ ,  $\int_J f \leq M$ . On pose alors

$$\int_I f = \sup_J \int_J f.$$

Si  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$ ,  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ , et son intégrale définie dans ce paragraphe coïncide avec l'intégrale définie au chapitre 2.

Opérations sur les fonctions continues par morceaux intégrables positives : somme, produit par un scalaire positif. Croissance : si  $f$  et  $g$  sont continues par morceaux sur  $I$ , si  $0 \leq f \leq g$  et si  $g$  est intégrable,  $f$  l'est aussi et  $\int_I f \leq \int_I g$ .

Si  $a$  appartient à  $I$ ,  $f$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si elle est intégrable sur  $I \cap ]-\infty, a]$  et sur  $I \cap [a, +\infty[$ .

Caractérisation de l'intégrabilité de  $f$  sur  $[a, b[$  à l'aide de la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ . Cas des fonctions définies sur  $]a, b]$ .

#### b) Fonctions intégrables à valeurs complexes

Une fonction  $f$  à valeurs réelles ou complexes continue par morceaux sur un intervalle  $I$  est dite intégrable (ou sommable) sur  $I$  si  $|f|$  est intégrable.

Si  $f$  et  $\varphi$  sont continues par morceaux sur  $I$ , si  $|f| \leq \varphi$  et si  $\varphi$  est intégrable sur  $I$ , alors  $f$  est intégrable sur  $I$ .

Une fonction  $f$  à valeurs réelles continue par morceaux est intégrable sur  $I$  si et seulement si  $f^+$  et  $f^-$  le sont ; on pose alors

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-.$$

Une fonction  $f$  à valeurs complexes continue par morceaux est intégrable sur  $I$  si et seulement si  $\operatorname{Re} f$  et  $\operatorname{Im} f$  le sont ; on pose alors

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f.$$

Linéarité de l'intégrale.

S'il existe une suite croissante  $(J_n)$  de segments dont la réunion est égale à  $I$  et telle que, pour tout  $n$ ,  $\int_{J_n} f \leq M$ , alors  $f$  est intégrable sur  $I$ . Dans ces conditions, pour toute suite  $(J_n)$  du type précédent

$$\int_I f = \sup_n \int_{J_n} f = \lim_n \int_{J_n} f.$$

En outre, elle est intégrable sur  $]a, b]$ ,  $[a, b[$  et  $]a, b[$ , et les quatre intégrales sont égales.

Une fonction  $f$  continue, positive et intégrable sur  $I$  est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Additivité de l'intégrale.

Intégrabilité de  $t \mapsto t^\alpha$  sur  $[a, +\infty[$ , sur  $]0, a]$ .

Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux intégrables sur  $I$ .

Dans ces conditions, pour toute suite  $(J_n)$  du type précédent

$$\int_I f = \lim_n \int_{J_n} f.$$

Si  $f$  est continue par morceaux sur  $[a, b]$ ,  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$ , et son intégrale définie dans ce paragraphe coïncide avec l'intégrale définie au chapitre 2. En outre, elle est intégrable sur  $]a, b]$ ,  $[a, b[$  et  $]a, b[$ , et les quatre intégrales sont égales.

Si  $f$  est continue par morceaux intégrable,  $|\int_I f| \leq \int_I |f|$ .



Si  $I'$  est un intervalle contenu dans  $I$  et si  $f$  est intégrable sur  $I$ , alors  $f$  est intégrable sur  $I'$  et  $\int_{I'} f = \int_I \chi_{I'} f$ .

Définition de  $\int_a^b f(t) dt$ , où  $a$  et  $b$  appartiennent à  $\overline{\mathbf{R}}$  et  $a < b$ , lorsque  $f$  est intégrable sur  $]a, b[$ . Cas où  $b < a$ . Relation de Chasles.

Étant donnée une fonction  $f$  à valeurs réelles ou complexes continue par morceaux sur  $[a, b[$ , il peut arriver que  $f$  ne soit pas intégrable sur  $[a, b[$ , mais que la fonction  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  admette une limite au point  $b$ ; cette limite est encore notée, de manière impropre,  $\int_a^b f(t) dt$ .

### c) Convergence en moyenne, en moyenne quadratique

Les fonctions continues et intégrables sur  $I$  à valeurs complexes constituent un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(I)$ ; norme de la convergence en moyenne  $f \mapsto N_1(f) = \int_I |f|$ .

Une fonction continue à valeurs complexes  $f$  est dite de carré intégrable sur  $I$  si  $|f|^2$  est intégrable sur  $I$ . Ces fonctions constituent un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(I)$ .

L'application  $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_I \bar{f}g$  est un produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme de la convergence en moyenne quadratique  $f \mapsto N_2(f) = (\int_I |f|^2)^{1/2}$ .

### d) Théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée

Théorème de convergence monotone : soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions à valeurs réelles continues par morceaux et intégrables sur  $I$  convergeant simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $I$  si et seulement si la suite  $(\int_I f_n)$  est majorée. Dans ces conditions,

$$\int_I f = \sup_n \int_I f_n = \lim_n \int_I f_n.$$

Application à l'intégration terme à terme d'une série de fonctions continues par morceaux positives.

Intégration terme à terme d'une série de fonctions : soit  $(f_n)$  une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur  $I$  telles que la série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$ . Alors si la série  $\sum \int_I |f_n|$  converge,  $f$  est intégrable sur  $I$  et

$$N_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n), \quad \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

Théorème de convergence dominée : soit  $(f_n)$  une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur  $I$  et  $\varphi$  une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur  $I$ . Si  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $I$  et si, pour tout entier  $n$ ,  $|f_n| \leq \varphi$  (hypothèse de domination), alors  $f$  est intégrable sur  $I$  et

$$\int_I f = \lim_n \int_I f_n.$$

Additivité de l'intégrale par rapport à l'intervalle d'intégration.

Si  $f = O(\varphi)$  où  $f$  et  $\varphi$  sont continues par morceaux sur  $[a, b[$ , et si  $\varphi$  est intégrable positive, alors  $f$  est intégrable.

Aucune connaissance spécifique sur les intégrales semi-convergentes n'est exigible des étudiants.

Le produit de deux fonctions continues  $f$  et  $g$  de carré intégrable sur  $I$  est intégrable sur  $I$ .

Inégalités

$$|(f|g)| \leq N_1(fg) \leq N_2(f) N_2(g);$$

continuité du produit scalaire.

Lorsque la suite  $(f_n)$  converge vers  $f$  uniformément sur tout segment de  $I$ , la démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants. Dans le cas général, elle est hors programme.

Lorsque la série  $\sum f_n$  converge vers  $f$  uniformément sur tout segment de  $I$ , la démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants. Dans le cas général, elle est hors programme.

Il convient d'insister sur l'importance de l'hypothèse de convergence de la série  $\sum \int_I |f_n|$ .

Lorsque la suite  $(f_n)$  converge vers  $f$  uniformément sur tout segment de  $I$ , la démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants. Dans le cas général, elle est hors programme.

Il convient d'insister sur l'importance de l'hypothèse de domination.

### e) Intégrales dépendant d'un paramètre

L'objectif est d'étendre les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe  $\int$ , déjà étudiés sur un segment, au cas d'un intervalle  $I$  quelconque dont l'origine et l'extrémité (prises dans  $\overline{\mathbf{R}}$ ) sont notées  $a$  et  $b$ . Les démonstrations de ces théorèmes ne sont pas exigibles des étudiants.

Continuité sous le signe  $\int$  : soit  $f$  une fonction à valeurs réelles ou complexes continue sur  $A \times I$ , où  $A$  est un intervalle de  $\mathbf{R}$  telle que, pour tout élément  $x$  de  $A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  soit intégrable sur  $I$ , et  $\varphi$  une fonction continue positive intégrable sur  $I$ . Alors si pour tout élément  $(x, t)$  de  $A \times I$   $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$  (hypothèse de domination), la fonction  $g$  définie sur  $A$  par la relation  $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$  est continue sur  $A$ .

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de  $A$ .

Dérivation sous le signe  $\int$  (formule de Leibniz) : soit  $A$  un intervalle de  $\mathbf{R}$  et  $f$  une fonction vérifiant les hypothèses du théorème précédent et admettant une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$  vérifiant elle aussi ces mêmes hypothèses. Alors  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$ , et

Extension aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ .

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

## 5- Courbes du plan et de l'espace

L'objectif de ce chapitre est double :

- Consolidar l'étude des courbes planes abordée en classe de première année, tant du point de vue affine (étude locale et asymptotique) que métrique (abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure). Aucune connaissance sur l'expression de la courbure en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires n'est exigible des étudiants.
- Exploiter les résultats obtenus sur les fonctions à valeurs vectorielles pour l'étude cinématique et géométrique des courbes de l'espace. Le repère de Frenet, la courbure et la torsion sont hors programme ; il en est de même pour la cinématique du solide, dans le plan ou dans l'espace.

La démarche du programme est de partir du point de vue cinématique (donnée d'un paramétrage) et d'introduire ensuite la notion de propriété géométrique en étudiant l'effet d'un changement de paramétrage.

Dans ce chapitre, on considère des fonctions  $f$  à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$  de dimension inférieure ou égale à 3, de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un intervalle  $I$ , où  $1 \leq k \leq +\infty$ .

### a) Courbes paramétrées

Courbes paramétrées (ou arcs paramétrés) de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Interprétation cinématique : mouvement, vitesse, accélération.

Effet d'un changement de paramétrage, paramétrage admissible. Trajectoire d'un mouvement, orientation. Point régulier (à l'ordre 1).

Les changements de paramétrage sont supposés de classe  $\mathcal{C}^k$  ainsi que leurs applications réciproques.

### b) Étude locale d'un arc orienté $\Gamma$ de classe $\mathcal{C}^k$

Définition des demi-tangentes en un point  $A$  de  $\Gamma$ , de la tangente en un point  $A$ . Existence d'une tangente en un point régulier.

Dans le cas d'une courbe plane, cas d'un point  $A$  où l'un au moins des vecteurs dérivés successifs est non nul.

L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.

## c) Étude métrique d'un arc orienté

Dans ce paragraphe, on suppose que  $F$  est un espace vectoriel euclidien.

Pour un arc orienté  $\Gamma$  régulier à l'ordre 1, vecteur unitaire de la tangente. Définition d'une abscisse curviligne : fonction  $s$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  telle que

$$s' = \|f'\|_2.$$

L'abscisse curviligne est un paramétrage admissible. Paramétrage normal d'un arc.

La longueur d'un arc est définie à l'aide de l'abscisse curviligne. Aucune connaissance spécifique sur une définition géométrique de cette longueur n'est exigible des étudiants.

**Travaux pratiques**

Exemples d'emploi du calcul différentiel et intégral pour l'étude globale des fonctions.

Obtention de majorations et minorations de suites et de fonctions, recherche d'extrémums, inégalités de convexité. . .

§ Exemples de méthodes de calcul de valeurs approchées d'intégrales et de comparaison de leurs performances.

La démarche consiste à subdiviser l'intervalle d'intégration et à approcher, sur chaque sous-intervalle, la fonction à intégrer par une fonction polynomiale.

Exemples d'étude de l'intégrabilité d'une fonction.

Il convient notamment d'exploiter l'intégration par parties.

Exemples d'étude du comportement asymptotique au voisinage de  $+\infty$  d'une primitive d'une fonction continue sur  $[a, +\infty[$ .

Exemples d'étude d'une fonction définie comme limite d'une suite de fonctions ou comme somme d'une série de fonctions (continuité, dérivation, intégration. . .).

Il convient d'exploiter les représentations intégrales pour la recherche et l'étude de solutions d'équations différentielles linéaires.

Exemples d'étude d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre (transformées de Fourier, transformées de Laplace, intégrales eulériennes. . .).

§ Exemples d'étude de courbes paramétrées du plan ou de l'espace et d'emploi de paramétrages d'ensembles du plan ou de l'espace définis par des conditions géométriques.

À travers l'ensemble du programme d'analyse, il convient d'exploiter le langage de la géométrie différentielle.

Exemples d'emploi d'une base orthonormale mobile pour le calcul de la dérivée d'une fonction vectorielle.

Aucun énoncé général sur la dérivation d'une base orthonormale mobile n'est exigible des étudiants.

Exemples d'étude de propriétés métriques de courbes planes (longueur d'un arc, repère de Frenet, courbure).

### III. SÉRIES, SÉRIES ENTIÈRES, SÉRIES DE FOURIER

L'objectif de cette partie est triple :

- Approfondir l'étude des séries de nombres réels ou complexes : comparaison à une intégrale ; applications à l'étude du comportement asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente ; produit de Cauchy.
- Étudier les propriétés élémentaires des séries entières et des séries de Fourier.
- Exploiter la représentation des fonctions par des séries entières ou des séries de Fourier pour l'étude de fonctions définies comme solutions d'une équation, en relation avec l'enseignement des autres disciplines scientifiques.

#### 1- Séries de nombres réels ou complexes

##### a) Comparaison d'une série à une intégrale

Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une intégrale : étant donnée une fonction  $f$  continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$  à valeurs réelles positives décroissante, la série de terme général

$$w_n = \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n)$$

est convergente. En particulier la série  $\sum f(n)$  converge si et seulement si  $f$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Équivalent de  $n!$  (formule de Stirling).

La relation  $w_n = \int_{n-1}^n [f(t) - f(n)] dt$  permet d'encadrer  $w_n$  ; un encadrement analogue peut être obtenu lorsque  $f$  est croissante. En outre, lorsque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , une intégration par parties permet d'écrire  $w_n$  sous la forme

$$w_n = - \int_{n-1}^n (t - n + 1) f'(t) dt.$$

La démonstration de la formule de Stirling n'est pas exigible des étudiants.

##### b) Produit de deux séries absolument convergentes

Définition du produit de Cauchy de deux séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  de nombres complexes :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q.$$

Si les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont absolument convergentes, la série  $\sum w_n$  l'est aussi.

Dans ces conditions,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \left( \sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right).$$

#### 2- Séries entières

L'objectif de ce chapitre est double :

- Étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme, grâce au concept fondamental de rayon de convergence.
- Introduire la notion de développement d'une fonction en série de Taylor, notamment pour le développement en série entière des fonctions élémentaires.

En ce qui concerne le développement de  $t \mapsto e^{tz}$  où  $t$  est réel et  $z$  complexe, il s'agit d'établir que cette fonction, déjà étudiée en première année, est aussi égale à  $t \mapsto \exp tz$ , définie à partir de la série exponentielle d'un nombre complexe.

Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.

##### a) Rayon de convergence d'une série entière

Série entière  $\sum a_n z^n$  d'une variable complexe  $z$  associée à une suite  $(a_n)$  de nombres complexes : définition du rayon de convergence  $R$  (fini ou non).

Étant donné un nombre réel  $\rho > 0$  tel que  $|a_n|\rho^n$  soit borné, alors pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| < \rho$ ,  $|a_n z^n|$  est dominé par  $\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$ .

La série est absolument convergente sur le disque (ouvert) de convergence. Elle est normalement convergente sur tout compact du disque de convergence ; continuité de la somme sur le disque de convergence.

Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières. Linéarité de la somme, somme du produit de Cauchy.

### b) Séries entières d'une variable réelle

Étant donnée une série entière  $\sum a_n t^n$  d'une variable réelle  $t$  dont le rayon de convergence  $R$  est strictement positif, une primitive sur l'intervalle  $] -R, R[$  de la somme  $f$  de cette série s'obtient en intégrant terme à terme.

La somme  $f$  d'une série entière  $\sum a_n t^n$  dont le rayon de convergence  $R$  est strictement positif est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R[$ . En outre, pour tout  $k \geq 1$ ,  $D^k f$  s'obtient par dérivation terme à terme.

Définition d'une fonction développable en série entière sur un intervalle  $] -r, r[$ , où  $r > 0$ .

Définition de la série de Taylor d'une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle  $] -r, r[$ , où  $r > 0$ .

En dehors du cas où  $\sum |a_n| R^n$  converge, tout énoncé général sur la convergence de la série en un point du cercle  $|z| = R$  et sur les propriétés de la somme de la série en un tel point est hors programme.

Relation

$$\exp(z + z') = \exp z \exp z'.$$

Invariance du rayon de convergence d'une série entière par intégration terme à terme, par dérivation terme à terme.

En particulier, pour tout entier  $k$  positif ou nul,

$$a_k = \frac{1}{k!} D^k f(0).$$

Développement en série de Taylor de  $e^{tz}$  où  $z$  est complexe, de  $\sin t$ , de  $\cos t$ . Développement de  $\ln(1+t)$ , de  $(1+t)^\alpha$  où  $\alpha$  est réel.

## 3- Séries de Fourier

L'objectif de ce chapitre est triple :

- Étudier les coefficients de Fourier d'une fonction  $f$  périodique, et notamment leur comportement asymptotique en fonction de la régularité de  $f$ .
- Étudier la convergence en moyenne quadratique des sommes partielles  $S_p(f)$  de la série de Fourier de  $f$  en utilisant la structure d'espace préhilbertien.
- Étudier la convergence ponctuelle des sommes  $S_p(f)$  : convergence normale, théorème de Dirichlet.

Il convient d'exploiter l'interprétation en termes d'analyse harmonique des signaux périodiques.

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont à valeurs complexes,  $2\pi$ -périodiques et continues par morceaux sur  $\mathbf{R}$ . Le cas des fonctions  $T$ -périodiques s'y ramène par changement de variable.

**a) Coefficients de Fourier**

Espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes  $2\pi$ -périodiques continues par morceaux sur  $\mathbf{R}$ .

Intégrale sur une période d'une fonction  $f$  à valeurs complexes  $2\pi$ -périodique continue par morceaux sur  $\mathbf{R}$ .

Définition des coefficients de Fourier d'une telle fonction :

$$\hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Expression des coefficients de Fourier sous forme de cosinus et de sinus.

Pour tout entier naturel  $p$ , définition de la somme partielle :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^p c_n(f) e^{inx}.$$

L'application  $\mathcal{F}$  qui à  $f$  associe  $\hat{f}$  est linéaire. La suite  $\hat{f}$  est bornée et  $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$ .

En outre,  $c_n(f)$  tend vers 0 au voisinage de l'infini.

Coefficients de Fourier d'une dérivée : si  $f$  est  $2\pi$ -périodique continue sur  $\mathbf{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbf{R}$ , alors

$$c_n(Df) = in c_n(f).$$

Extension au cas où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  sur  $\mathbf{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux sur  $\mathbf{R}$ .

**b) Convergence en moyenne quadratique.**

Dans ce paragraphe, on considère des fonctions  $2\pi$ -périodiques continues sur  $\mathbf{R}$ . Il convient d'effectuer une brève extension au cas des fonctions continues par morceaux ; les démonstrations concernant cette extension ne sont pas exigibles des étudiants.

Produit scalaire  $(f, g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) g(t) dt$  sur l'espace vectoriel  $\mathcal{C}_{2\pi}$  des fonctions  $2\pi$ -périodiques continues sur  $\mathbf{R}$  ; norme associée  $f \mapsto \|f\|_2$ .

La projection orthogonale d'un élément  $f$  de  $\mathcal{C}_{2\pi}$  sur le sous-espace vectoriel  $\mathcal{P}_p$  engendré par les  $e_n$ , où  $|n| \leq p$ , est la somme partielle  $S_p(f)$ .

Relation

$$\|f\|^2 = (\|S_p(f)\|_2)^2 + d(f, \mathcal{P}_p)^2.$$

Inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=-p}^p |c_n(f)|^2 \leq (\|f\|_2)^2.$$

Convergence en moyenne quadratique : pour tout élément  $f$  de  $\mathcal{C}_{2\pi}$ , les sommes partielles  $S_p(f)$  convergent en moyenne quadratique vers  $f$ .

L'application linéaire  $f \mapsto \hat{f}$  est injective.

Définition d'une fonction  $2\pi$ -périodique continue par morceaux  $f$  à partir d'une fonction  $g$  continue par morceaux sur un segment de longueur  $2\pi$ .

Coefficients de Fourier de  $\bar{f}$  ; cas d'une fonction à valeurs réelles. Coefficients de Fourier de  $t \mapsto f(-t)$  ; cas d'une fonction paire, d'une fonction impaire. Effet d'une translation : coefficients de Fourier de  $t \mapsto f(t+a)$ .

Lorsque qu'en un point  $x$  de  $\mathbf{R}$  les sommes partielles  $S_p(f)$  convergent, la série de Fourier est dite convergente au point  $x$  et la somme de la série de Fourier est, par définition, la limite des sommes  $S_p(f)(x)$ .

Par définition  $\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$ .

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

Si  $f$  est  $2\pi$ -périodique de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  sur  $\mathbf{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^k$  par morceaux sur  $\mathbf{R}$ , alors  $c_n(f)$  est négligeable devant  $|n|^{-k}$  au voisinage de l'infini.

Les fonctions  $t \mapsto e_n(t) = e^{int}$ , où  $n$  parcourt  $\mathbf{Z}$ , forment une famille orthonormale et, pour tout  $n$ ,  $c_n(f) = (e_n|f)$ .

En particulier, l'application qui à tout élément  $P$  de  $\mathcal{P}_p$  associe  $\|f-P\|_2$  atteint son minimum en un point et un seul, à savoir  $S_p(f)$ .

Formule de Parseval : expressions du carré de la norme et du produit scalaire à l'aide des coefficients de Fourier.

### c) Convergence ponctuelle

Convergence normale : lorsque  $f$  est  $2\pi$ -périodique continue sur  $\mathbf{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbf{R}$ , les sommes  $\sum_{n=p}^p |(c_n(f))|$  sont majorées. Dans ces conditions, les sommes partielles  $S_p(f)$  de la série de Fourier de  $f$  convergent uniformément vers  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .

Théorème de Dirichlet : soit  $f$  une fonction  $2\pi$ -périodique de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbf{R}$ , alors pour tout nombre réel  $x$ , la série de Fourier de  $f$  converge en ce point et sa somme est égale à  $\frac{1}{2} \lim_h [f(x+h) + f(x-h)]$  où  $h$  tend vers 0,  $h > 0$ . En particulier, en tout point  $x$  où  $f$  est continue, la somme de la série de Fourier de  $f$  est égale à  $f(x)$ .

En particulier, pour tout nombre réel  $x$ , la série de Fourier de  $f$  converge en ce point, et sa somme est égale à  $f(x)$ .

La démonstration du théorème de Dirichlet n'est pas exigible des étudiants.

### Travaux pratiques

§ Pour une série de nombres réels positifs, exemples d'encadrement du reste d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente; exemples de recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

Exemples d'étude du comportement asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente.

§ Exemples de recherche et d'emploi de développements en série entière ou en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle; exemples d'utilisation de tels développements pour l'approximation d'une fonction.

Il convient notamment d'exploiter la comparaison d'une série à une intégrale.

Il convient de mettre en valeur l'emploi de séries entières et de séries de Fourier pour la recherche et l'étude de solutions d'équations différentielles.

## IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

*L'objectif de cette partie est d'étudier les systèmes différentiels linéaires et d'introduire quelques notions sur le cas non linéaire, en relation étroite avec la géométrie différentielle et les systèmes dynamiques continus.*

*Il convient de relier cette étude à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d'évolution et une condition initiale, traitement du signal). Il convient d'étudier le comportement du signal de sortie associé à différents types de signaux d'entrée et de dégager la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance. On peut alors être amené à étendre la notion de solution (fonction  $\mathcal{C}^1$  ou  $\mathcal{C}^2$  par morceaux).*

### 1- Équations différentielles linéaires

*L'objectif de ce chapitre est triple :*

- Étudier les équations linéaires d'ordre 1 à valeurs vectorielles, et leurs traductions en termes de systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.
- Étudier le cas particulier d'une équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, en relation avec la réduction des endomorphismes.
- Étudier le cas particulier des équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2.

*Les applications considérées dans cette partie sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  et à valeurs dans un espace vectoriel normé  $F$  de dimension finie sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .*

#### a) Équations linéaires d'ordre 1

Définition d'une solution sur  $I$  de l'équation différentielle linéaire  $x' = a(t)x + b(t)$  où  $a$  désigne une application continue de  $I$  dans  $\mathcal{L}(F)$  et  $b$  une application continue de  $I$  dans  $F$ .

Traduction en termes matriciels, en termes de systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.

Existence et unicité de la solution sur  $I$  du problème de Cauchy.

Les solutions sur  $I$  de l'équation  $x' = a(t)x$  constituent un sous-espace vectoriel  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{C}^1(I)$ . En outre, étant donné un élément  $\alpha$  de  $I$ , l'application qui à tout élément  $f$  de  $\mathcal{E}$  associe  $f(\alpha)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{E}$  sur  $F$ .

Définition d'un système fondamental  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de l'équation  $x' = a(t)x$ . Caractérisation d'un tel système; wronskien.

### b) Équations linéaires à coefficients constants

Étude de l'équation  $x' = ax$ , où  $a$  est un endomorphisme de  $F$ .

### c) Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2

Équation  $a(t)x' + b(t)x = c(t)$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont continues sur  $I$  à valeurs réelles ou complexes.

Équation  $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$  où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont continues sur  $I$  à valeurs réelles ou complexes. Lorsque  $a$  ne s'annule pas sur  $I$ , système d'ordre 1 associé, existence et unicité de la solution sur  $I$  du problème de Cauchy, structure de l'espace des solutions de l'équation homogène, systèmes fondamentaux de solutions, wronskien.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

En particulier, la dimension de  $\mathcal{E}$  est égale à  $n = \dim F$ .

Application à la résolution de l'équation différentielle  $x' = a(t)x + b(t)$  par la méthode de variation des constantes.

Traduction matricielle  $X' = AX$ , où  $A$  est une matrice à éléments réels ou complexes.

Structure de l'espace des solutions lorsque  $a$  ne s'annule pas sur  $I$ .

Application à la résolution de l'équation par la méthode de variation des constantes.

Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène associée ne s'annulant pas sur  $I$ .

## 2- Notions sur les équations différentielles non linéaires

*L'objectif de ce chapitre est d'introduire quelques notions de base sur les équations différentielles autonomes d'ordre 1 et les systèmes différentiels autonomes d'ordre 2, et de les appliquer au cas d'une équation non autonome d'ordre 1.*

*Il s'agit essentiellement de familiariser les étudiants avec le concept de système autonome et de mettre en œuvre les résultats du cours sur des exemples simples. Aucune connaissance spécifique sur les propriétés des solutions maximales et des courbes intégrales n'est exigible des étudiants.*

*Il convient de valoriser les interprétations géométriques, notamment en termes de courbes intégrales de champs de vecteurs du plan, en relation avec l'étude des systèmes dynamiques continus issus des autres sciences, et notamment la mécanique, la physique et l'automatique.*

### a) Systèmes différentiels autonomes

Définition d'une solution d'un système différentiel autonome d'ordre 2, de la forme  $x' = f(x, y)$ ,  $y' = g(x, y)$  où  $f$  et  $g$  sont des fonctions à valeurs réelles de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^2$ . Invariance par translation. Définition d'une solution maximale. Interprétation géométrique : courbe intégrale d'un champ de vecteurs.

Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

Cas d'une équation différentielle autonome d'ordre 1, de la forme  $x' = f(x)$  où  $f$  est une fonction à valeurs réelles de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$ .

La démonstration de ce théorème est hors programme.

### b) Équations non autonomes

Définition d'une solution d'une équation différentielle de la forme  $x' = f(t, x)$  où  $f$  est à valeurs réelles et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^2$ .

Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

### Travaux pratiques

§ Pratique de la résolution de l'équation  $X' = AX$ , où  $A$  est une matrice à éléments réels ou complexes (par réduction de  $A$  à une forme diagonale ou triangulaire).

Exemples d'étude de solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2.

Il convient d'étudier quelques exemples de raccordements de solutions.



§ Exemples d'étude d'équations associées à une forme différentielle exacte, d'équations à variables séparables.

Cas d'une équation autonome d'ordre 1, de la forme  $x' = f(x)$ .

§ Exemples de recherche et d'étude des courbes intégrales d'un champ de vecteurs dans le plan.

## V. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

L'objectif de cette partie est triple :

- Consolider les acquis de première année : calcul différentiel portant sur les fonctions numériques de deux variables réelles.
- Étendre les notions de base du calcul différentiel aux applications continûment différentiables sur un ouvert de  $\mathbf{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$ , en relation avec la géométrie différentielle et l'analyse vectorielle.
- Effectuer une étude élémentaire des formes différentielles de degré 1 (intégrales curvilignes, primitives) en relation avec l'étude des champs de vecteurs, la mécanique et la physique.

### 1- Calcul différentiel

L'objectif essentiel est d'étudier quelques notions de base : dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, applications continûment différentiables, différentielle, difféomorphismes, gradient, points critiques. En revanche, la notion de fonction différentiable en un point est hors programme.

Le programme comporte en outre quelques notions sur les dérivées partielles d'ordre supérieur.

Les applications  $f$  considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert  $U$  de  $E$  à valeurs dans  $F$ , où  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels de dimension finie. Pour la pratique, le programme se limite au cas où  $\dim E \leq 3$ ,  $\dim F \leq 3$  et où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . L'étude de fonctions différentiables non de classe  $\mathcal{C}^1$  est hors programme.

Pour l'étude d'une fonction  $f$  de plusieurs variables, il convient de mettre en valeur le fait que la plupart des problèmes peuvent se ramener au problème correspondant pour une fonction d'une variable en paramétrant le segment  $[a, a+h]$ , ce qui permet d'écrire  $f(a+h) - f(a) = \varphi_h(1) - \varphi_h(0)$  où, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi_h(t) = f(a+th)$ .

#### a) Applications continûment différentiables

Définition d'une fonction  $f$  différentiable en un point  $a$  de  $U$  et de l'application linéaire tangente à  $f$  en  $a$ , appelée aussi différentielle de  $f$  au point  $a$  et notée  $df(a)$ .

Interprétation en termes de développement limité de  $f$  à l'ordre 1.

Définition de la dérivée de  $f$  en un point  $a$  de  $U$  selon un vecteur  $h$ , notée  $D_h f(a)$ . Définition des dérivées partielles dans une base de  $E$ , notées  $D_j f(a)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ .

Il existe un nombre réel  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $t \in [-\delta, \delta]$ ,  $a + th$  appartienne à  $U$ ; on pose alors  $\varphi_h(t) = f(a + th)$ . Si  $\varphi_h$  est dérivable à l'origine, on dit que  $f$  admet une dérivée en  $a$  selon  $h$ , et l'on pose  $D_h f(a) = \varphi_h'(0)$ .

Définition des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  (ou continûment différentiables) sur  $U$  : les dérivées partielles  $D_j f$  sont continues sur  $U$ .

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

Théorème fondamental : si les dérivées partielles  $D_j f$  sont continues sur  $U$ , alors  $f$  est différentiable en tout point  $a$  de  $U$ .

Si  $f$  et  $g$  sont deux applications de classe  $\mathcal{C}^1$ , leur composée  $g \circ f$  l'est aussi; différentielle de  $g \circ f$ . Définition d'un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$ . Opérations algébriques sur les applications de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Caractérisation d'une application  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$  par ses coordonnées  $f_i$ ; en outre, les fonctions  $D_j f_i$  sont les coordonnées de  $D_j f$ .

Pour une application de classe  $\mathcal{C}^1$ , matrice jacobienne; lorsque  $n = p$ , jacobien.

Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque.

Dérivée d'une fonction composée de la forme  $f \circ \varphi$ , où  $\varphi$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $U$ .

Lorsque  $f$  est un difféomorphisme, l'image  $f(\Gamma)$  d'une courbe paramétrée  $\Gamma$  régulière à l'ordre 1 est une courbe régulière à l'ordre 1; détermination d'une tangente à  $f(\Gamma)$ .

Caractérisation à l'aide du jacobien des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe  $\mathcal{C}^1$ .

La démonstration de ce résultat est hors programme.

### b) Fonctions numériques continûment différentiables

Algèbre  $\mathcal{C}^1(U)$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

Dans l'espace euclidien  $\mathbf{R}^p$ , le gradient de  $f$  est défini par

$$df(a)(h) = D_h f(a) = (\text{grad} f(a)|h).$$

Coordonnées du gradient.

Lorsque l'ouvert  $U$  est convexe, inégalité des accroissements finis pour une fonction numérique de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

Caractérisation des fonctions constantes sur l'ouvert  $U$ .

Points critiques d'une fonction numérique de classe  $\mathcal{C}^1$ ; condition nécessaire d'existence d'un extrémum local.

### c) Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$

Théorème de Schwarz pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$ . Algèbre  $\mathcal{C}^k(U)$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$ .

La démonstration du théorème de Schwarz est hors programme.

Les opérateurs différentiels  $D_j$  sont des applications linéaires de  $\mathcal{C}^k(U)$  dans  $\mathcal{C}^{k-1}(U)$ , où  $1 \leq k < +\infty$ .

### d) Coordonnées polaires

Repère polaire  $(\vec{u}, \vec{v})$  du plan euclidien  $\mathbf{R}^2$  défini, pour tout nombre réel  $\theta$ , par :

$$\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2,$$

$$\vec{v}(\theta) = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2$$

où  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est la base canonique de  $\mathbf{R}^2$ .

Coordonnées polaires d'un point de  $\mathbf{R}^2$ .

$$\text{Relations } \frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}.$$

Expression des coordonnées du gradient d'une fonction à valeurs réelles  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  en fonction des dérivées partielles de la fonction

$$(\rho, \theta) \mapsto F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

### e) Notions sur les courbes et les surfaces

Dans ce paragraphe, les courbes du plan ou de l'espace et les surfaces sont définies par paramétrages ou par équations cartésiennes. Aucune difficulté ne peut être soulevée sur l'équivalence de ces définitions.

L'objectif, très modeste, est d'introduire la notion de tangente à une courbe plane définie par une équation cartésienne  $F(x, y) = 0$ , et de plan tangent à une surface définie par une équation cartésienne  $F(x, y, z) = 0$ . L'étude des courbes d'une surface définies par des conditions différentielles est hors programme.

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions étudiées dans ce paragraphe. Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour traiter ce paragraphe sont admises.

Définition d'un point régulier d'une surface définie par paramétrage  $(u, v) \mapsto f(u, v)$ , où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^3$ . Plan tangent, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point régulier où les deux plans tangents sont distincts.

Définition d'un point régulier d'une courbe plane définie par une équation cartésienne  $F(x, y) = 0$ , où  $F$  est à valeurs réelles et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^2$ . Tangente, normale. Cas d'une surface.

## 2- Calcul intégral

L'objectif de ce chapitre est double :

- Consolider les acquis de première année concernant les intégrales doubles à travers la pratique de problèmes.
- Effectuer une étude élémentaire des formes différentielles de degré 1.

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient d'effectuer une brève extension du calcul intégral aux intégrales triples mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

### a) Intégrales doubles

Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur les notions introduites dans ce paragraphe.

Intégrale double d'une fonction à valeurs réelles ou complexes définie et continue sur une partie compacte définie par des conditions simples (rectangles, secteurs circulaires...).

Aucune connaissance sur l'intégration sur des parties non compactes n'est exigible des étudiants.

Formule de Fubini : expressions de l'intégrale double sur un rectangle à l'aide de deux intégrations successives.

Formule de changement de variables dans une intégrale double ; cas du passage en coordonnées polaires.

La démonstration de ces deux résultats est hors programme.

## b) Intégrales curvilignes

*Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur la notion de forme différentielle.*

Définition d'une forme différentielle  $\omega$  de degré 1 de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^p$ . Définition d'une primitive sur  $U$  d'une telle forme ; définition d'une forme exacte sur  $U$ .

Intégrale curviligne de  $\omega$  sur un arc orienté  $\Gamma$  de  $U$ , notation  $\int_{\Gamma} \omega$ .

Définition d'une forme de classe  $\mathcal{C}^1$  fermée sur  $U$ . Toute forme de classe  $\mathcal{C}^1$  exacte sur  $U$  est fermée sur  $U$ . Réciproque lorsque l'ouvert  $U$  est étoilé.

Interprétation en termes de champs de vecteurs.

Écriture  $\omega = \sum_{j=1}^p a_j dx_j$ .

Calcul de l'intégrale curviligne d'une forme exacte à l'aide d'une primitive de  $\omega$ .

La démonstration de cette réciproque n'est pas exigible des étudiants.

### Travaux pratiques

Exemples d'emploi de coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques.

§ Exemples de recherche d'extrémums locaux ou globaux.

Exemples de recherche de solutions d'équations aux dérivées partielles par séparation ou changement de variables.

Exemples de calculs d'intégrales curvilignes et de recherche d'un potentiel scalaire pour un champ de vecteurs.

Exemples de calculs d'intégrales doubles et d'aires planes.

§ Exemples de représentation d'une surface à l'aide d'une famille de sections planes.