

Compte-rendu de projet BASTA

Robbie Jameson Nicolas Omont

15 décembre 2002

1 Introduction

On utilise la très classique Lena (figure 1) pour ces études (image 256x256). On constate que les distributions des sauts sont à peu près symétriques et qu'elles sont à décroissance lente. On constate que la distribution est plus étalée pour les sauts horizontaux (figure 2) que pour les sauts verticaux (figure 3), ce qui indique la présence de nombreuses séparations verticales dans l'image. Dans la suite, nous travaillerons toujours avec les sauts horizontaux.



FIG. 1 – Image de test LENA.TIF

2 Modélisation par une gaussienne

2.1 Comparaison d'histogrammes

Les estimations de la moyenne et de la variance indiqués dans la table 2.1

	Horizontal	Vertical
Moyenne	0,0789	-0,0952
Variance	351,3	171,6

TAB. 1 – Moyenne et variance des sauts dans l'image LENA.TIF

On constate que les distributions obtenues semblent très loin de gaussiennes. Cependant, cette intuition doit être confirmée car une gaussienne très pointue pourrait ressembler à cet histogramme. La superposition de l'histogramme et de la loi gaussienne associée (figure 4) confirme l'inadéquation du modèle gaussien.

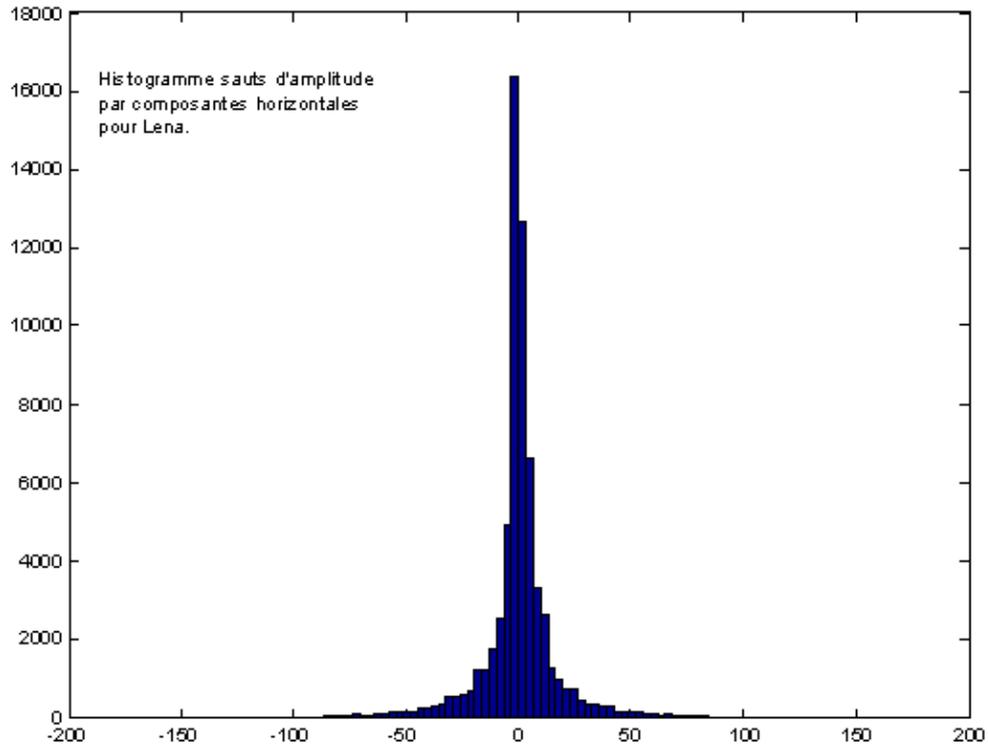


FIG. 2 – Sauts par composantes horizontales de l'image

2.2 Comparaison de quantiles

On a le résultat suivant :

Les quantiles $t_1(p)$ d'une variable gaussienne $X_1 = N(m_1, s_1)$ sont linéaires par rapport aux quantiles $t_2(p)$ d'une autre variable gaussienne $X_2 = N(m_2, s_2)$, i.e.

$$t_1(p) = a.t_2(p) + b, \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Démonstration : Par changement de variable dans l'équation $P(X_1 < t_1(p)) = P(X_2 < t_2(p))$, on obtient :

$$\frac{t_1(p) - m_1}{s_1} = \frac{t_2(p) - m_2}{s_2},$$

ce qui correspond bien à une relation linéaire.

On observe que le tracé des quantiles des sauts horizontaux en fonction des quantiles d'une gaussienne centrée réduite n'est pas du tout une droite (figure 5),

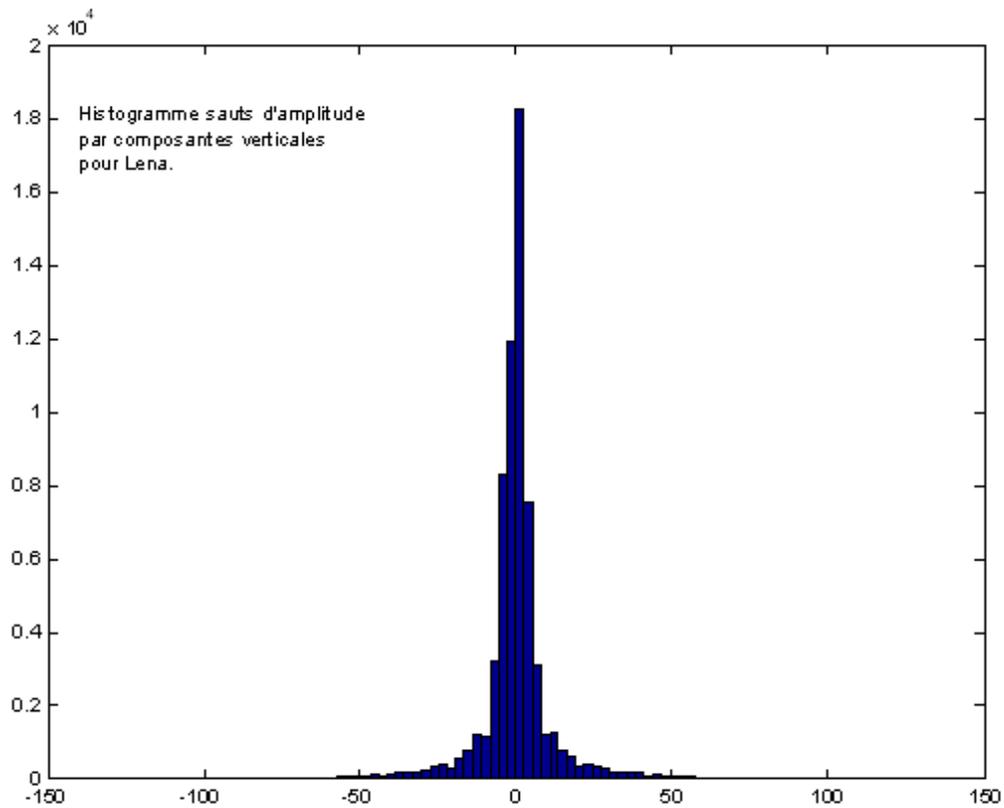


FIG. 3 – Sauts par composantes verticales de l'image

donc on peut conclure que la gaussienne est une mauvaise modélisation de la distribution. C'est encore plus visible que sur l'histogramme, dont les valeurs sont toujours plus bruitées que les quantiles.

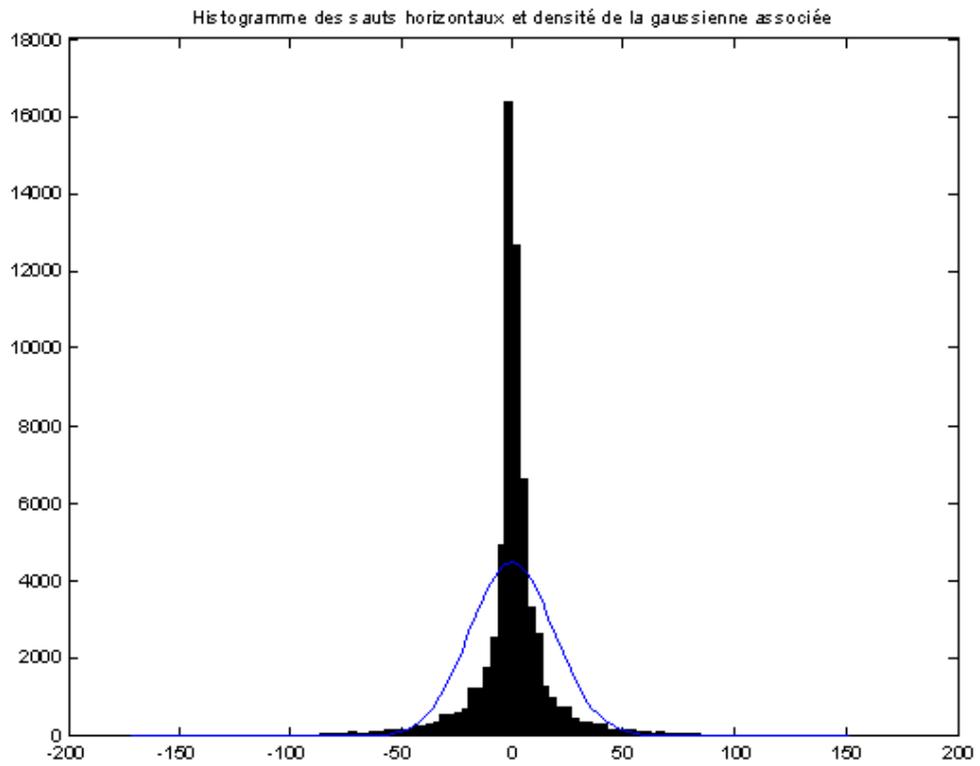


FIG. 4 – Approximation des sauts par une gaussienne unique

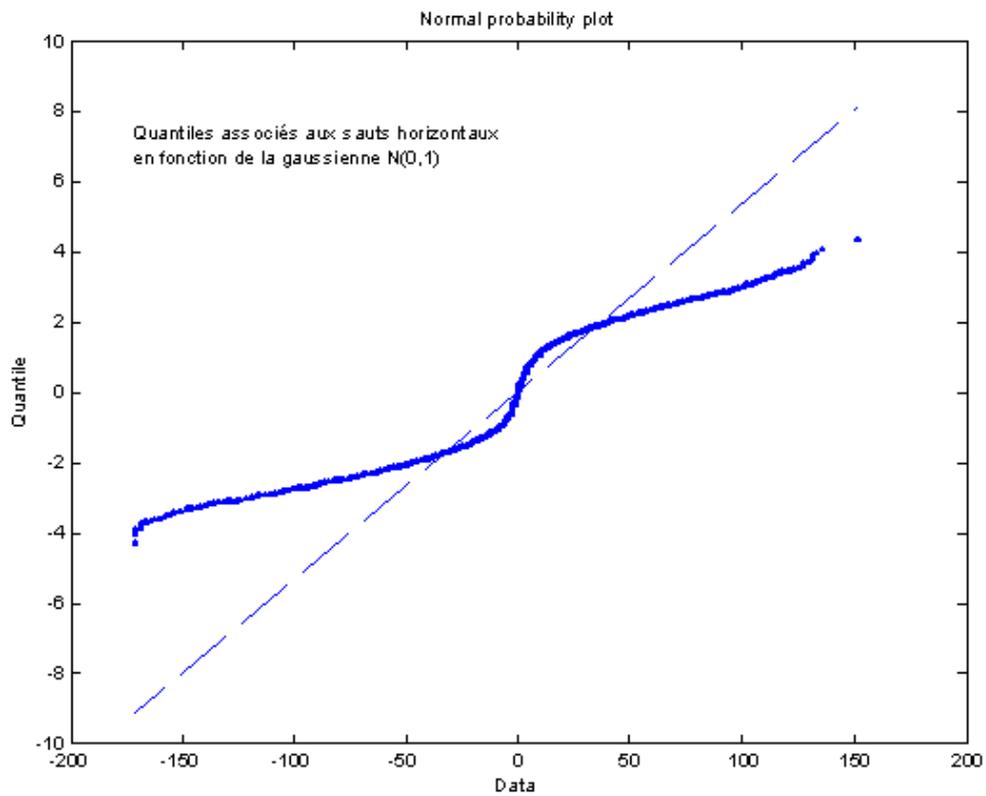


FIG. 5 – Quantiles associés aux sauts horizontaux en fonction de la gaussienne censée les estimer au mieux

3 Modélisation par une loi “Laplacienne généralisée”

3.1 Estimation par la méthode des moments

Le kurtosis empirique est 15,197. On peut donc estimer α à $0,607 \pm 0,02$ grâce au graphique de la figure 6 et η à 0,260 grâce à l'équation $\sigma^2 = \frac{\Gamma(\frac{3}{\alpha})}{\eta^2 \Gamma(\frac{1}{\alpha})}$.

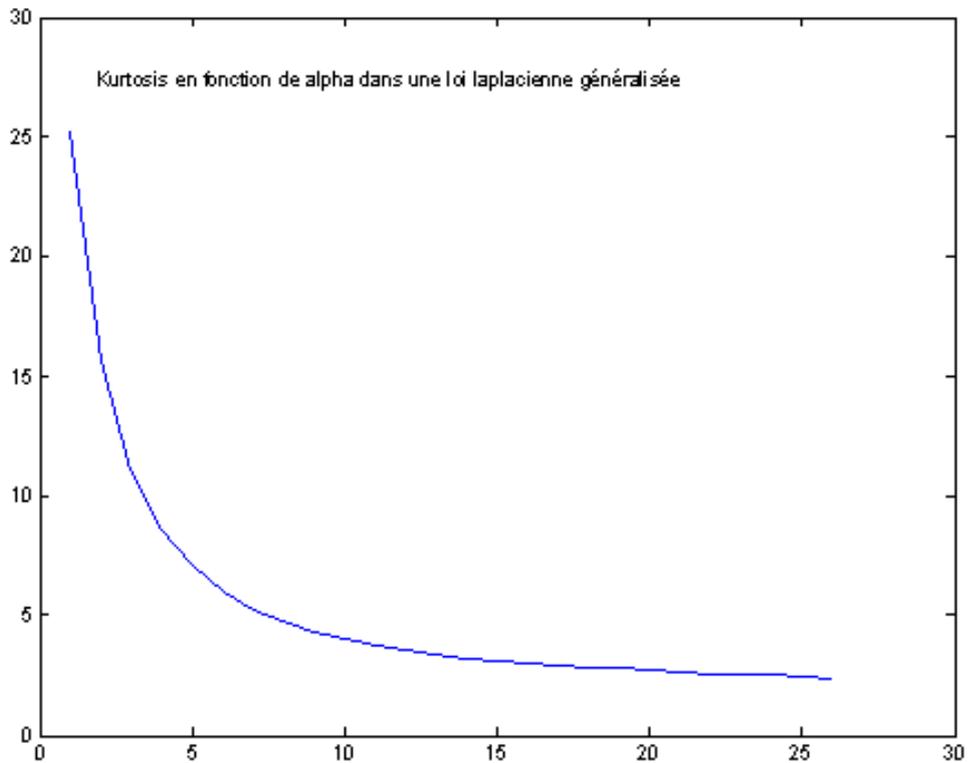


FIG. 6 – Kurtosis en fonction de α

On peut ainsi superposer l'histogramme des sauts verticaux à la loi de densité obtenue (figure 7).

Le résultat semble assez bon. On continue de vérifier l'adéquation du modèle grâce au graphe quantile-quantile (figure 8).

On voit qu'il y a encore des imperfections, surtout vers les extrêmes.

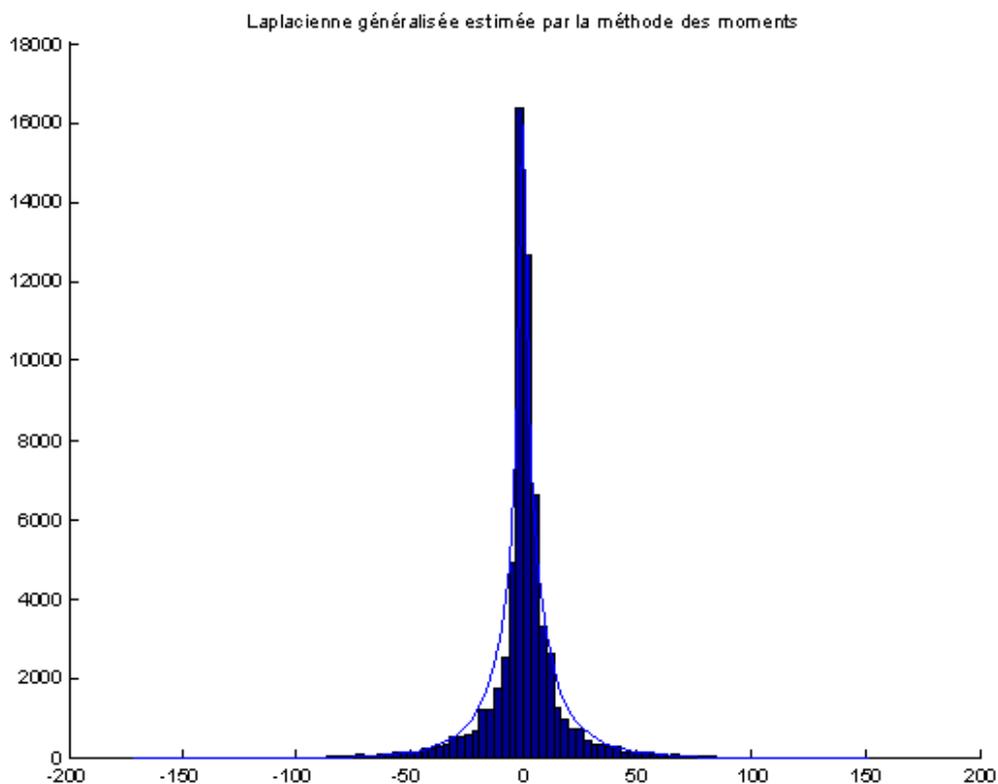


FIG. 7 – Estimation par la méthode de la Laplacienne généralisée

3.2 Estimation par méthode du maximum de vraisemblance

On réalise l'itération décrite en l'initialisant avec les paramètres trouvés précédemment. On obtient des paramètres assez éloignés des premiers qui donnent de meilleurs résultats, même si la densité en 0 est un peu trop élevée :

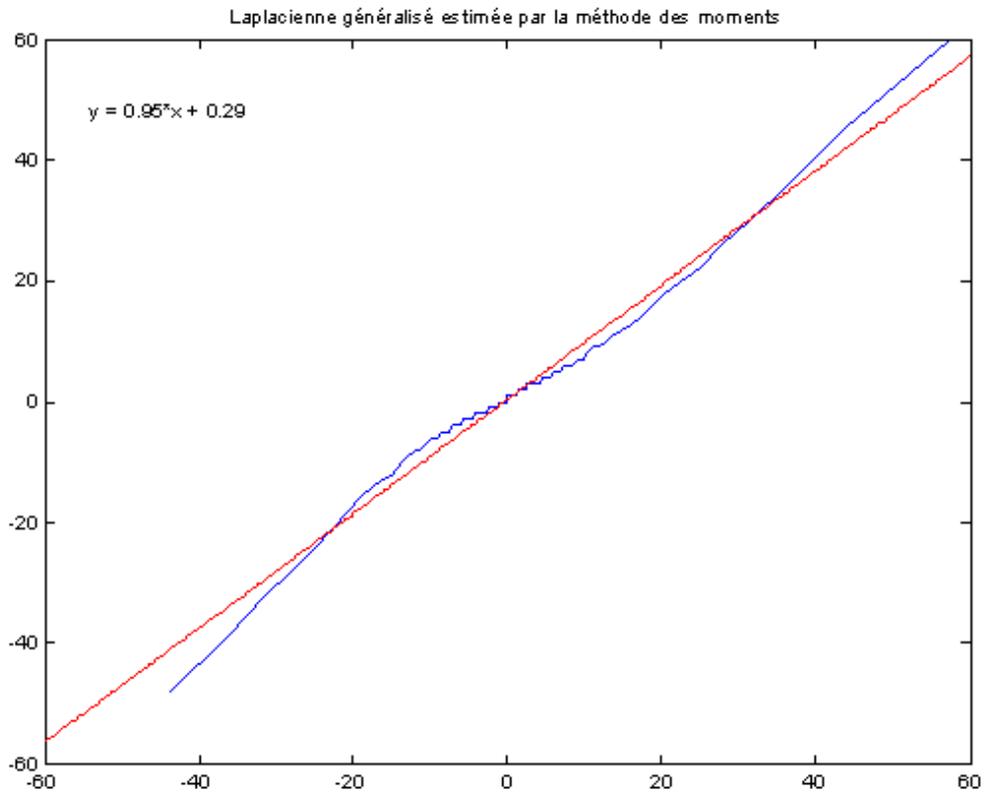


FIG. 8 – Graphe quantile-quantile, modélisation “Laplacienne Généralisée” – méthode des moments

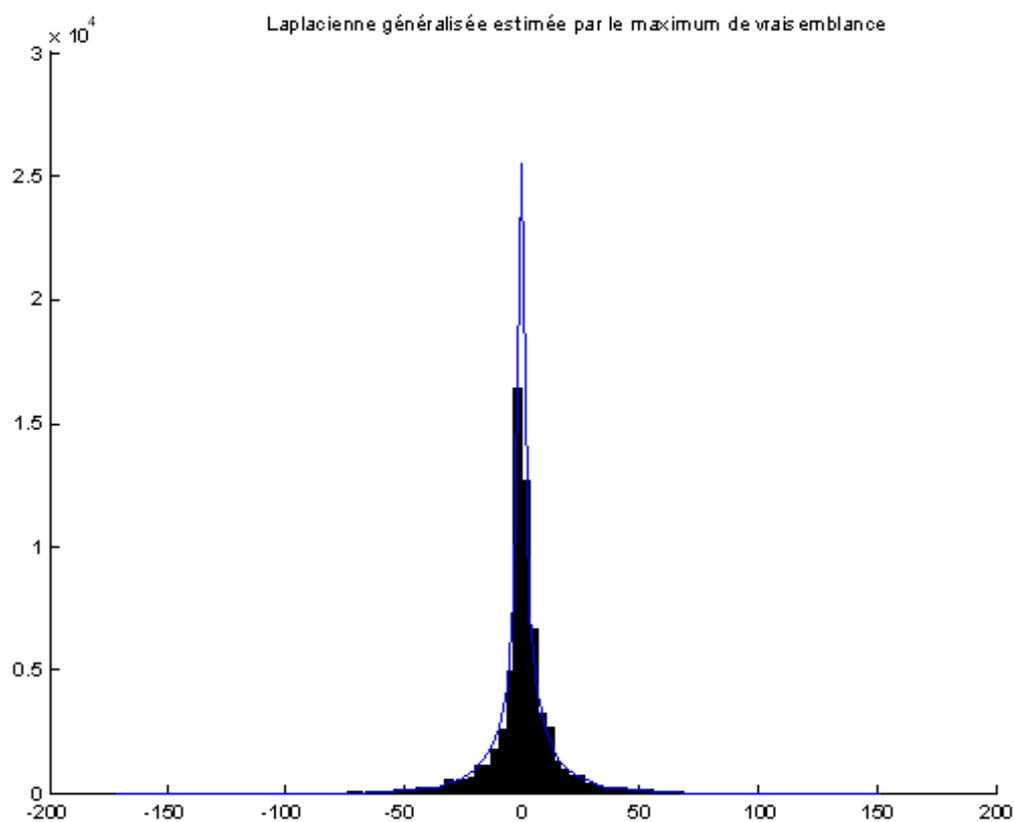


FIG. 9 – Histogramme empirique et estimé par la méthode du maximum de vraisemblance, modélisation “Laplacienne généralisée”

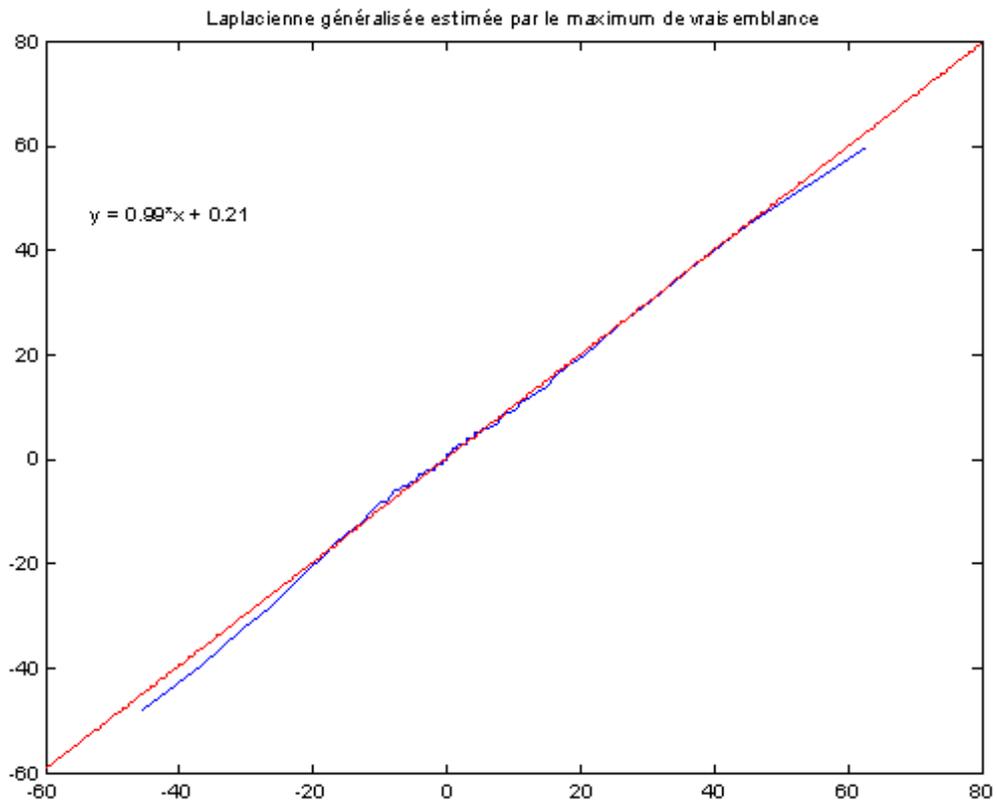


FIG. 10 – Tracé quantile-quantile, pour la méthode du maximum de vraisemblance, modélisation “Laplacienne généralisée”

4 Mélange de gaussiennes

On réalise l'algorithme indiqué, sachant que son initialisation est délicate, car une mauvaise initialisation provoque un dépassement numérique. Le plus simple pour un calcul avec K gaussiennes ($K > 1$, sinon l'algorithme est inutile) est d'initialiser les paramètres des $K - 1$ premières gaussiennes avec le résultat de l'algorithme pour un mélange de $K - 1$ gaussiennes, et de compléter pour la dernière avec une gaussienne d'une variance voisine de l'avant dernière. On obtient les densités suivantes (figure 11 bleu : $K = 1$ à rouge : $K = 5$). On constate que les densités 4 et 5 sont inséparables à l'oeil nu. On peut donc se contenter d'un mélange de 4 gaussiennes.

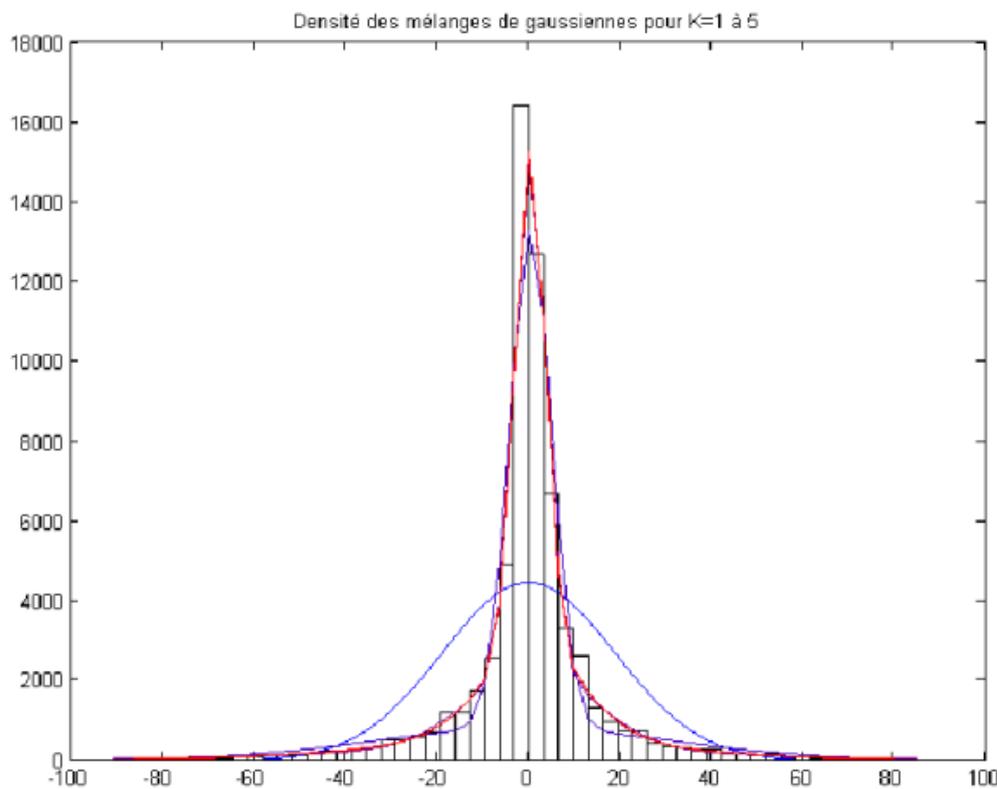


FIG. 11 – Estimation avec mélange de gaussiennes

On peut aussi tracer le graphe quantile-quantile pour ces 5 distributions (figure 12). Ici, plutôt que de calculer le quantile théorique, on a procédé au tirage aléatoire d'un vecteur de la même dimension que celui des observations selon les lois de probabilités calculées.

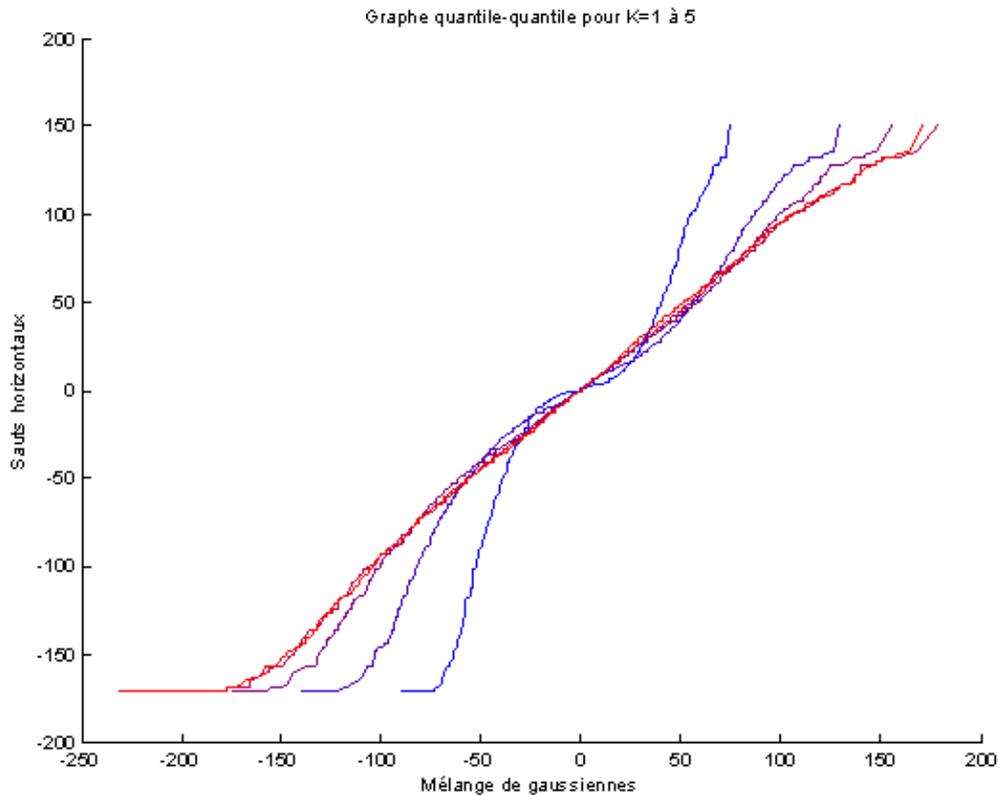


FIG. 12 – Tracé quantile-quantile avec mélange de gaussiennes (Bleu, $K = 1$ – Rouge, $K = 5$)

On constate là aussi que les courbes correspondant à 4 et 5 gaussiennes sont inséparables, donc on peut se contenter d'un mélange de 4 gaussiennes.

5 Intervalles de confiance

On reprend donc ici le modèle pour X_1 donné par la densité $h(x) = C(\alpha, \eta) \exp(-|\eta x|^\alpha)$, avec $C(\alpha, \eta) = \frac{\alpha\eta}{2} \Gamma(\alpha^{-1})^{-1}$, $\eta > 0$, $\alpha > 0$.

a Théorème de la limite centrale

On a par le théorème de la limite centrale (8.3.4) le résultat suivant, pour Y_i une suite de vecteurs aléatoires de \mathbf{R}^k indépendants identiquement distribués, de

moyenne μ et de covariance Σ :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (Y_i - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

Appliqué aux vecteurs qui nous intéressent, les X_i étant indépendants identiquement distribués, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n ((X_i^4, X_i^2) - E[(X_i^4, X_i^2)]) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

avec Σ la matrice de covariance de (X_1^4, X_1^2) .

De ceci on déduit pour les variables qui nous intéressent la relation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\left(\sum_{i=1}^n X_i^4, \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) - n (E_{\alpha, \eta}[X_1^4], E_{\alpha, \eta}[X_1^2]) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

Ce qui se lit également :

$$\sqrt{n} \left[(\overline{X}_n^4, \overline{X}_n^2) - (E_{\alpha, \eta}[X_1^4], E_{\alpha, \eta}[X_1^2]) \right] \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

Explicitons la matrice Σ en fonction des moments $m_p = E_{\alpha, \eta}[X_1^p]$.

On a :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{var}(X_1^4) & \text{cov}(X_1^4, X_1^2) \\ \text{cov}(X_1^4, X_1^2) & \text{var}(X_1^2) \end{pmatrix}$$

$$\text{var}(X_1^4) = E[X_1^8] - [E[X_1^4]]^2$$

Soit $\text{var}(X_1^4) = m_8 - m_4^2$.

De manière similaire, on trouve $\text{var}(X_1^2) = m_4 - m_2^2$.

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_1^4, X_1^2) &= E[(X_1^4 - E[X_1^4])(X_1^2 - E[X_1^2])] \\ &= m_6 - 2m_2m_4 + m_2m_4 \\ &= m_6 - m_2m_4 \end{aligned}$$

Nous obtenons donc la forme suivante pour Σ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} m_8 - m_4^2 & m_6 - m_2 m_4 \\ m_6 - m_2 m_4 & m_4 - m_2^2 \end{pmatrix}$$

b Fonction pour la δ -méthode

Soit $\Phi(u, v) = w^{-1}(u/v^2)$. Le graphe de la figure 6 suffit à nous convaincre que w est très probablement une bijection d'un intervalle A , $A \subset [0, \infty[$. Pour une preuve complète il suffirait de montrer de $\frac{dw}{dx} = (5\psi(5x) + \psi(x) - 6\psi(3x)) w(x)$ est de signe constant et n'est jamais nul.

Posons $\tau(u, v) = \frac{u}{v^2}$. On alors

$$\Phi(u, v) = w^{-1}(\tau(u, v))$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} &= \frac{dw^{-1}}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial u} \\ \frac{\partial \tau}{\partial u} &= \frac{1}{v^2} \\ \frac{dw^{-1}}{d\tau} &= \frac{1}{\frac{dw}{dx}(w^{-1}(\tau))} \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\Gamma(5x)\Gamma(x)}{(\Gamma(3x))^2} \right) \end{aligned}$$

On a par ailleurs à l'esprit que $\psi(x) = \frac{d(\log \Gamma(x))}{dx}$.

$$\frac{dw}{dx} = 5 \frac{\Gamma'(5x)\Gamma(x)}{(\Gamma(3x))^2} + \frac{\Gamma'(x)\Gamma(5x)}{(\Gamma(3x))^2} - 6 \frac{\Gamma(5x)\Gamma(x)\Gamma'(3x)}{(\Gamma(3x))^3}$$

D'où

$$\frac{dw}{dx} = (5\psi(5x) + \psi(x) - 6\psi(3x)) w(x)$$

On a de même

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{dw^{-1}}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial v}$$

Et

$$\frac{\partial \tau}{\partial v} = -2 \frac{u}{v^3}$$

Le reste du calcul est identique.

On obtient au final :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{1}{u} \frac{1}{5\psi(5w^{-1}) + \psi(w^{-1}) - 6\psi(3w^{-1})}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = -\frac{2}{v} \frac{1}{5\psi(5w^{-1}) + \psi(w^{-1}) - 6\psi(3w^{-1})}$$

Avec w^{-1} à lire comme $w^{-1} \left(\frac{u}{v^2} \right)$.

c Calcul du gradient local

On a d'après les calcul préliminaires vus en TD :

$$m_2 = \frac{\Gamma(3/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)\eta^2}$$

$$m_4 = \frac{\Gamma(5/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)\eta^4}$$

On calcule :

$$w^{-1} \left(\frac{m_4}{m_2} \right) = \frac{1}{\alpha} = x$$

On remarque donc au passage que

$$\Phi(m_4, m_2) = x$$

et que l'on aura

$$\hat{x} = \Phi \left(\overline{X_n^4}, \overline{X_n^2} \right)$$

et on en déduit donc :

$$\nabla \Phi \begin{pmatrix} m_4 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_4} \frac{1}{5\psi(5x) + \psi(x) - 6\psi(3x)} \\ -\frac{1}{m_2} \frac{1}{5\psi(5x) + \psi(x) - 6\psi(3x)} \end{pmatrix}$$

On constate qu'il reste Ψ dans l'expression de $\nabla \Phi \begin{pmatrix} m_4 \\ m_2 \end{pmatrix}$, mais ce ne sera pas un problème pour les calculs dans la suite car la fonction digamma est intégrée à Matlab.

d δ -méthode

Nous appliquons la δ -méthode à la situation présente en suivant le polycopié p 130, §8.6. Par application directe de la proposition 8.6.1, on a

$$\sqrt{n} \left(\Phi(\overline{X_n^4}, \overline{X_n^2}) - \Phi(m_4, m_2) \right) = \sqrt{n} \left(\Phi(\overline{X_n^4}, \overline{X_n^2}) - \mathbf{x} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} (\Phi_1 \quad \Phi_2) \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

$$\text{Avec } (\Phi_1 \quad \Phi_2) = \nabla \Phi \left(\begin{array}{c} m_4 \\ m_2 \end{array} \right)^T.$$

Nous avons constaté une erreur dans l'énoncé (notre correction est représentée en gras dans la première équation ci-dessus. La formule qu'il était demandé de trouver n'est pas homogène et conduirait forcément à $\hat{x} \rightarrow 1$ ce qui nous simplifierait considérablement le travail mais serait tout de même un peu dérangentant. . .

Ceci peut s'écrire, si T_1 et T_2 sont deux variables aléatoires gaussiennes telles que $cov(T_1, T_2) = \Sigma$, sous la forme :

$$\sqrt{n} \left(\Phi(\overline{X_n^4}, \overline{X_n^2}) - x \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Phi_1 T_1 + \Phi_2 T_2 = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Ceci amène

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= var(\Phi_1 T_1 + \Phi_2 T_2) \\ &= E[(\Phi_1 T_1 + \Phi_2 T_2 - E[\Phi_1 T_1 + \Phi_2 T_2])^2] \\ &= E[(\Phi_1 T_1 + \Phi_2 T_2)^2] \\ &= E[\Phi_1^2 T_1^2 + \Phi_2^2 T_2^2 + 2\Phi_1 \Phi_2 T_1 T_2] \\ &= \Phi_1^2 E[T_1^2] + \Phi_2^2 E[T_2^2] + 2\Phi_1 \Phi_2 E[T_1 T_2] \\ &= \Phi_1^2 var(T_1) + \Phi_2^2 var(T_2) + 2\Phi_1 \Phi_2 cov(T_1, T_2) \end{aligned}$$

Soit

$$\sigma^2 = \Phi_1^2(m_8 - m_4^2) + \Phi_2^2(m_4 - m_2^2) + 2\Phi_1 \Phi_2(m_6 - m_2 m_4)$$

On a

$$\mathcal{N}(0, \sigma^2) = \sqrt{\sigma^2} \mathcal{N}(0, 1)$$

On en déduit que $R(x, (m_p)_{p=2,4,6,8})$ peut s'écrire

$$\frac{1}{(5\Psi(5x) + \Psi(x) - 6\Psi(3x))^2} \left(\frac{m_8 - m_4^2}{m_4^2} + 4 \frac{m_4 - m_2^2}{m_2^2} - 4 \frac{(m_6 - m_2 m_4)}{m_4 m_2} \right)$$

Soit donc finalement pour $R(x, (m_p)_{p=2,4,6,8})$

$$\frac{1}{(5\Psi(5x) + \Psi(x) - 6\Psi(3x))^2} \left(\frac{m_8}{m_4^2} - 4\frac{m_6}{m_4 m_2} + 4\frac{m_4}{m_2^2} - 1 \right)$$

e Vers une approximation de l'intervalle de confiance

Lorsque l'on remplace x par \hat{x} et $(m_p)_{p=2,4,6,8}$ par $(\overline{X_n^p})_{p=2,4,6,8}$ dans l'équation

$$\sqrt{\frac{n}{R(x, (m_p)_{p=2,4,6,8})}} \left(\Phi(\overline{X_n^4}, \overline{X_n^2}) - x \right),$$

on obtient une nouvelle expression de la forme

$$\sqrt{\frac{n}{\hat{R}}} \left(\Phi(\overline{X_n^4}, \overline{X_n^2}) - \hat{x} \right).$$

Cette équation peut nous servir d'outil pour donner un intervalle de confiance approché pour \hat{x} en fonction des données expérimentales, puisque si le modèle est juste cette expression est d'espérance nulle et doit converger asymptotiquement vers une gaussienne normalisée.

f Calcul de l'intervalle de confiance

Nous avons donc construit une fonction

$$Z \left(\hat{x}, (\overline{X_n^p})_{p=2,4,6,8} \right) = \sqrt{\frac{n}{R \left(\hat{x}, (\overline{X_n^p})_{p=2,4,6,8} \right)}} \left(\Phi(\overline{X_n^4}, \overline{X_n^2}) - \hat{x} \right) \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

C'est donc une fonction dont la distribution ne dépend ni de x , ni des $(m_p)_{p=2,4,6,8}$.

On a :

$$P \left(|Z \left(\hat{x}, (\overline{X_n^p})_{p=2,4,6,8} \right)| \leq \beta \right) \sim \int_{-\beta}^{\beta} \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

Et

$$95\% = \int_{-1,96}^{1,96} \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

Cherchons donc un intervalle de confiance pour \hat{x} avec $\beta = 1,96$.

$$-\beta \leq \sqrt{\frac{n}{R \left(\hat{x}, (\overline{X_n^p})_{p=2,4,6,8} \right)}} \left(\Phi(\overline{X_n^4}, \overline{X_n^2}) - \hat{x} \right) \leq \beta$$

Il est hélas impossible de résoudre directement cette équation en \hat{x} et nous sommes contraints de faire des approximations. Nous supposons donc qu'une valeur approchée de \hat{x} , soit x^* a été obtenue numériquement en résolvant l'équation

$$w(x^*) = \frac{\overline{X_n^4}}{(\overline{X_n^2})^2}$$

Dès lors posons

$$R^* = R(x^*, (\overline{X_n^p})_{p=2,4,6,8})$$

On a donc, "au premier ordre en x^* "

$$-\beta \leq \sqrt{\frac{n}{R^*}} (x^* - \hat{x}) \leq \beta$$

Ce qui donne finalement

$$x^* - \beta\sqrt{R^*/n} \leq \hat{x} \leq x^* + \beta\sqrt{R^*/n}$$

D'où le résultat pour $\hat{\alpha}$

$$\frac{1}{x^* + \beta\sqrt{R^*/n}} \leq \hat{\alpha} \leq \frac{1}{x^* - \beta\sqrt{R^*/n}}$$

Avec, pour résumer :

$$\begin{cases} \beta = 1,96 \\ x^* \text{ solution numérique de } w(x^*) = \frac{\overline{X_n^4}}{(\overline{X_n^2})^2} \\ \hat{R} = \frac{1}{(5\Psi(5x^*) + \Psi(x^*) - 6\Psi(3x^*))^2} \left(\frac{\overline{X_n^8}}{(\overline{X_n^4})^2} - 4\frac{\overline{X_n^6}}{(\overline{X_n^4} \overline{X_n^2})} + 4\frac{\overline{X_n^4}}{(\overline{X_n^2})^2} - 1 \right) \end{cases}$$

g Application numérique

On utilise pour α^* la valeur de α estimée par la méthode des moments (section 3.1). On pour intervalle de confiance pour \hat{x} :

$$\hat{x} = 1,6490 \pm 0,0292$$

Soit aussi $x \in [1,6198 ; 1,6782]$. Pour $\hat{\alpha}$, avec $\alpha^* = 0,6064$:

$$0,5959 \leq \hat{\alpha} \leq 0,6174.$$

6 Etude multiéchelles

On applique de 1 à 5 fois l'algorithme de sous-échantillonnage. Pour les mélanges de 4 gaussiennes, on obtient les résultats suivants présentés sur la figure 13 (Rouge : image originale – Bleu : image réduite 5 fois).

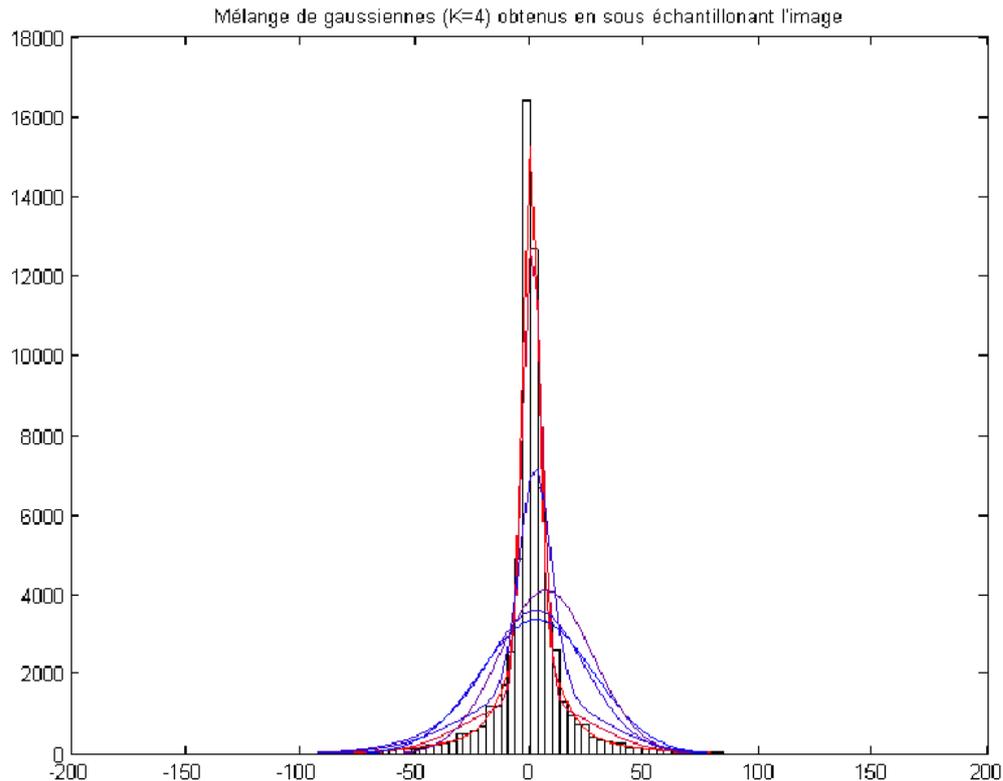


FIG. 13 – Résultats d'estimation à 4 gaussiennes sur les résultats d'applications successives de l'algorithme de sous-échantillonnage

On constate que le sous-échantillonnage est particulièrement dramatique pour le mélange de gaussiennes. Elles retrouvent très vite leur tendance à faire de belles cloches arrondies. Cela s'explique par le fait que la distribution s'étale quand on sous-échantillonne, car la corrélation entre les couleurs de deux points diminue quand la distance entre ces points augmente, autrement dit, plus deux points sont loins l'un de l'autre, moins ils ont de chance d'être de la même couleur.

On réalise le même travail sur le modèle des laplaciennes généralisées (figure 14).

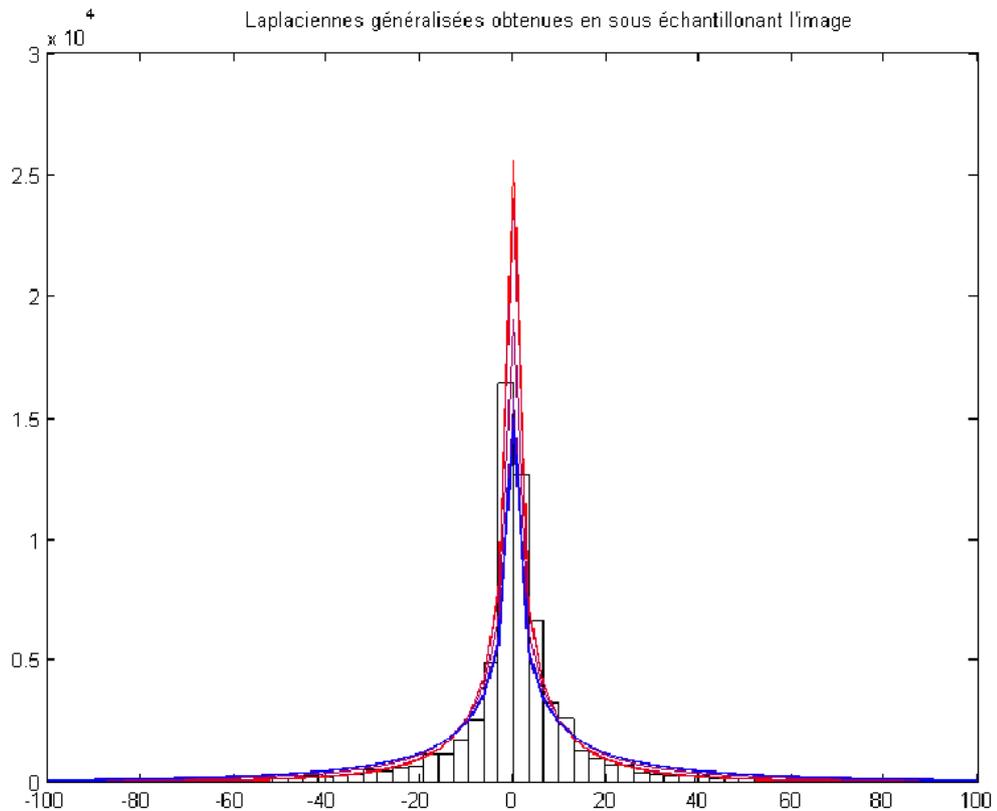


FIG. 14 – Résultats d'estimation avec modèle à laplaciennes généralisées sur les résultats d'applications successives de l'algorithme de sous-échantillonnage

La modélisation semble être plus pertinente : si on perd bien de la hauteur en 0 du fait de l'étalement de la distribution modélisée, on garde bien la même forme de courbe, ce qu'on vérifie dans le graphe quantile-quantile de la figure 15. En effet, les quantiles des modèles sont linéaires par rapport à ceux des observations, seul la pente change, ce qui confirme l'étalement de la distribution sous-jacente. Attention, ici, le bleu correspond à l'image complète et le rouge à l'image sous-échantillonnée 5 fois.

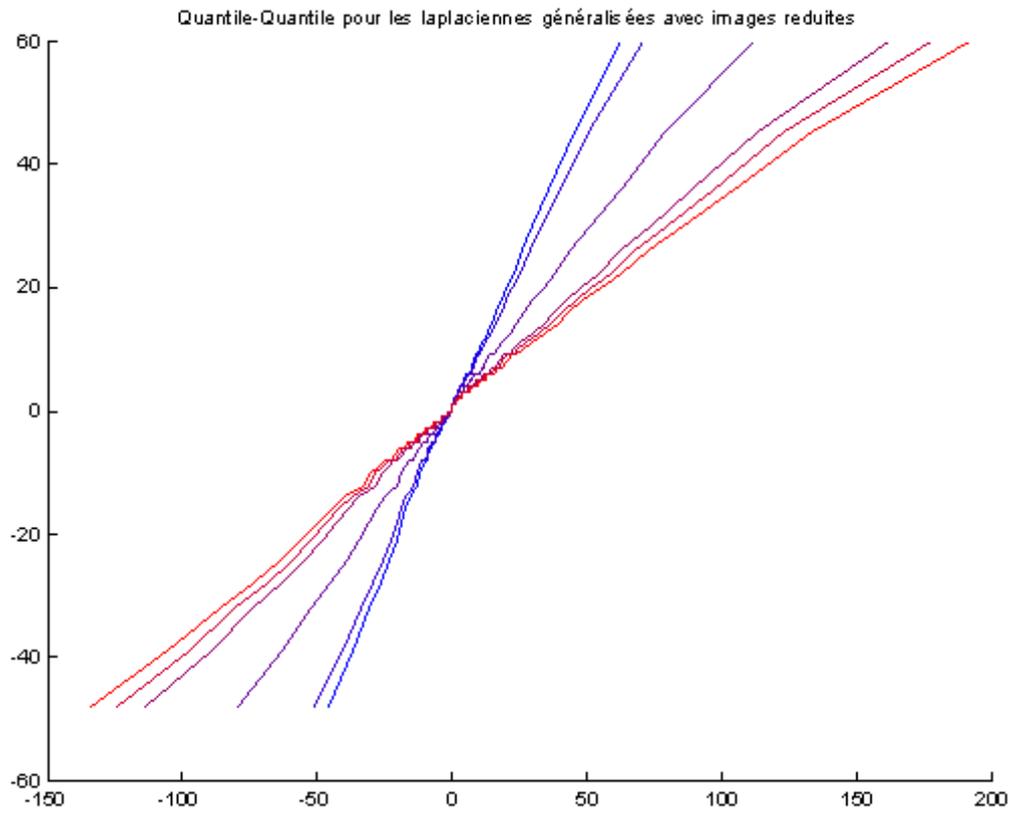


FIG. 15 – Graphes quantile-quantile pour le modèle à laplaciennes généralisées pour des applications successives de l’algorithme de sous-échantillonnage

7 Sources Matlab

7.1 Modélisation par une gaussienne

```
% TP BASTA
% Partie 1 - modélisation par une gaussienne

%clear all
a=imread('lena.tiff');
imagesc(a);
colormap gray;
a=double(a);
[h,v]=saut(a);
[M,N]=size(a);

saut_h=reshape(h,(M-1)*(N-1),1);
saut_v=reshape(v,(M-1)*(N-1),1);

%figure(1);
hist(saut_v,100);
%figure(2);
hist(saut_h,100);

%Question 1.1

mu_h=mean(saut_h)
mu_v=mean(saut_v)

sigma2_h=var(saut_h)
sigma2_v=var(saut_v)

N_h=(randn((M-1)*(N-1),1)-mu_h)*sqrt(sigma2_h);
N_v=(randn((M-1)*(N-1),1)-mu_v)*sqrt(sigma2_v);

%figure(3);

hist(saut_h,100);

%Question 1.2
range=max(saut_h)-min(saut_h);
V=(0:0.01:1)*range+min(saut_h);
W=((M-1)*(N-1)*range/100)/sqrt(2*pi*sigma2_h)*
*exp(-(V.*V-mu_h)/(2*sigma2_h));
hold on
plot(V,W);
hold off

%figure(4);
```

```

%hist(N_v,100);
p=[1:100]/100;

%figure(5)

%plot(quantile(saut_h,p));
%figure(6)
%qqnorm(saut_h);

```

7.2 Modélisation par une “Laplacienne généralisée”

```

% TP BASTA
% Partie 2 - modélisation par laplacienne généralisée

%clear all
a=imread('lena.tiff');
%a=reduit(reduit(reduit(reduit(a))))
%imagesc(a);
colormap gray;
a=double(a);
[h,v]=saut(a);
[M,N]=size(a);
L=(M-1)*(N-1);

saut_h=reshape(h,L,1);
saut_v=reshape(v,L,1);

p=[1:100]/100;

% 2 Modélisation par une loi Laplacienne généralisée

% 2.1 méthode des moments

V=(0.5:0.001:10);
K=gamma(V).*gamma(5*V)./gamma(3*V).^2;
%plot(K);
sigma2_emp=1/L*sum(saut_h.^2);
kurtosis_emp=1/L*sum(saut_h.^4)/sigma2_emp^2;
[erreur,indice]=min(abs(K-kurtosis_emp));
alpha=1/V(indice);
eta=sqrt(gamma(3/alpha)/(sigma2_emp*gamma(1/alpha)));

V1=[-200:0.1:200];
QLap= 0.5+0.5*sign(V1).*gammainc((abs(eta*V1)).^alpha,1/alpha);
size(quantile(saut_h,p));

% figure(1)

```

```

% hold on
% hist(saut_h,100);
% range=max(saut_h)-min(saut_h);
% Vb=(0:0.01:1)*range+min(saut_h);
% W=(L*range/100)*lapgen(Vb,alpha,eta);
% plot(Vb,W);
% hold off

% figure(2)
% %Quantile de la modélisation
% for i=1:100
%     [e,j]=min(abs(QLap-p(i)));
%     Quantile(i) = V1(j);
% end
% X=Quantile(2:99);
% %Quantile de l'échantillon
% Y=quantile(saut_h,p);
% plot(X,Y(2:99));

alphan=alpha
etam=eta

%2.2 Méthode par estimation du maximum de vraisemblance
ecart=1;
logVrP=0;
V2=(0.001:0.001:2);
while (ecart > 0.1)
    %Calcul de alpha
    S1=1/L*sum( ((abs(eta*saut_h)).^alpha)_
    .* (log(eta)+log(max(abs(saut_h),1)))));
    MV1=V+digamma(V).*(V.*V); %V=1/alpha
    [erreur,indice]=min(abs(MV1-S1));
    alpha=1/V(indice)
    %Calcul de eta
    S2=1/L*sum(abs(saut_h).^alpha);

    [erreur,indice]=min(abs( 1./V2 - S2*alpha*(V2).^alpha));
    eta=V2(indice)
    %Calcul de la log vraisemblance
    logC=log(alpha*eta/(2*gamma(1/alpha)));
    logVr=L*logC-sum((abs(eta*saut_h)).^alpha);
    ecart=abs(logVr-logVrP);
    logVrP=logVr
end

res=[alpha eta]'

% figure(3);
% QLap= 0.5+0.5*sign(V1).*gammainc((abs(eta*V1)).^alpha,1/alpha);

```

```

% for i=1:100
%     [e,j]=min(abs(QLap-p(i)));
%     Quantile(i) = V1(j);
% end
% Z=Quantile(2:99);
% plot(Z,Y(2:99));
%
% %Tracé des histogrammes
%
% figure(4)
% hold on
% hist(saut_h,100);
% range=max(saut_h)-min(saut_h);
% V=(0:0.01:1)*range+min(saut_h);
% W=(L*range/100)*lapgen(V,alpha,eta);
% plot(V,W);
% hold off

```

7.3 Mélange de gaussiennes

Algorithme EM

```

% TP BASTA
% Partie 3 - modélisation par un mélange de gaussiennes

```

```

a=imread('lena.tiff');
a=reduit(reduit(reduit(reduit(a))));
%imagesc(a);
colormap gray;
a=double(a);
[h,v]=saut(a);
[M,N]=size(a);
L=(M-1)*(N-1);

saut_h=reshape(h,L,1);
saut_v=reshape(v,L,1);

p=[1:100]/100;

%Nombre de gaussiennes mélangées
K=4;
%Définition de eta
%ligne 1:alpha, 2:variance, 3:moyennes
eta=zeros(3,K);
eta(1,:)=1/K * ones(1,K) ; %Tous équiprobales
eta(2,:)= [1:K]*350/K ; %Entre 0 et 350
eta(3,:)= zeros(1,K); %Centrés

```

```
Qo=0;
ecart=1;
while(ecart > 0.1)
    %Définir P
    P= (ones(L,1)*eta(1,:)) .*gauss(saut_h,eta);
    SommeP=sum(P,2);
    P=P./(SommeP*ones(1,K));

    T=sum(P,1);

    %Calculer les nouveaux termes
    eta(1,:) = 1/(L) * T;
    eta(2,:) = sum(P.*((saut_h.*saut_h)*ones(1,K)),1) ./ T;
    eta(3,:) = sum(P.*((saut_h)*ones(1,K)),1) ./ T;

    %Calculer la vraisemblance
    tmp=saut_h*ones(1,K)-ones(L,1)*eta(3,:);
    S=sum( P.* (-0.5*log(2*pi*ones(L,1)*eta(2,:)))+(tmp.*tmp)_
    ./ (2*ones(L,1)*eta(2,:)) );
    Q=sum( T.*log(eta(1,:))+ S );

    ecart = abs(Q - Qo);
    Qo=Q
end

u=[-150:150]';
d=sum((ones(301,1)*eta(1,:)).*gauss(u,eta),2);
```

Affichage de résultats comparatifs : exemple des graphes quantile-quantile

```
u1=randmg(eta1,L);
u2=randmg(eta2,L);
u3=randmg(eta3,L);
u4=randmg(eta4,L);
u5=randmg(eta5,L);

figure(1);
qqplot(u1,saut_h);
figure(2);
qqplot(u2,saut_h);
figure(3);
qqplot(u3,saut_h);
figure(4);
qqplot(u4,saut_h);
figure(5);
qqplot(u5,saut_h);
```

7.4 Calcul de l'intervalle de confiance

```

% TP BASTA
% Partie 4 - Intervalles de confiance

%-----
%calcul préparatif - reprise du modèle "laplacienne généralisée"

clear all
a=imread('lena.tiff');
%a=reduit(reduit(reduit(reduit(reduit(a))))))
%imagesc(a);
colormap gray;
a=double(a);
[h,v]=saut(a);
[M,N]=size(a);
L=(M-1)*(N-1);

saut_h=reshape(h,L,1);
saut_v=reshape(v,L,1);

p=[1:100]/100;

% 2 Modélisation par une loi Laplacienne généralisée

% 2.1 méthode des moments

V=(0.5:0.001:10);
K=gamma(V).*gamma(5*V)./gamma(3*V).^2;
%plot(K);
sigma2_emp=1/L*sum(saut_h.^2);
kurtosis_emp=1/L*sum(saut_h.^4)/sigma2_emp^2;
[erreur,indice]=min(abs(K-kurtosis_emp));
alpha=1/V(indice);
eta=sqrt(gamma(3/alpha)/(sigma2_emp*gamma(1/alpha)));

V1=[-200:0.1:200];
QLap= 0.5+0.5*sign(V1).*gammainc((abs(eta*V1)).^alpha,1/alpha);
size(quantile(saut_h,p));

%utiliser alphas pour la méthode des moments
alpham=alpha
etam=eta

%2.2 Méthode par estimation du maximum de vraisemblance
ecart=1;
logVrP=0;
V2=(0.001:0.001:2);

```

```

while (ecart > 0.1)
    %Calcul de alpha
    S1=1/L*sum( ((abs(eta*saut_h)).^alpha).*(log(eta)_
+log(max(abs(saut_h),1)))));
    MV1=V+digamma(V).*(V.*V); %V=1/alpha
    [erreur,indice]=min(abs(MV1-S1));
    alpha=1/V(indice)
    %Calcul de eta
    S2=1/L*sum(abs(saut_h).^alpha);

    [erreur,indice]=min(abs( 1./V2 - S2*alpha*(V2).^alpha));
    eta=V2(indice)
    %Calcul de la log vraisemblance
    logC=log(alpha*eta/(2*gamma(1/alpha)));
    logVr=L*logC-sum( (abs(eta*saut_h)).^alpha);
    ecart=abs(logVr-logVrP);
    logVrP=logVr
end

alphav=alpha

%-----
%calcul d'intervalle de confiance

%mettre en variable alpha_chap la variable alphas ou alphav
%suivant la méthode de préestimation souhaitée.
alpha_chap=alphas

%intervalle de confiance à 95%
beta=1.96;
x_chap=1/alpha_chap;

Xn8=mean(saut_h.^8)
Xn6=mean(saut_h.^6)
Xn4=mean(saut_h.^4)
Xn2=mean(saut_h.^2)

PF=1/(5*digamma(5*x_chap)+digamma(x_chap)-6*digamma(3*x_chap))^2;
F=Xn8/(Xn4)^2-4*Xn6/(Xn4*Xn2)+4*Xn4/(Xn2)^2-1;
R_chap=PF*F;

c=beta*sqrt(R_chap/L)
x_borne_inf=x_chap-c
x_chap
x_borne_sup=x_chap+c

```

```
alpha_inf=1/x_borne_sup
alpha_chap
alpha_sup=1/x_borne_inf
```

7.5 Analyse multiéchelle

```
load 'etude multiechelle (etared et reslap).mat'
figure(1)
hist(saut_h,100)
range=max(saut_h)-min(saut_h);
V=(0:0.01:1)'*range+min(saut_h);
W=(L*range/100);
u1=W*sum(ones(101,1)*etared(1, :, 1)).*gauss(V,etared(:, :, 1)),2);
u2=W*sum(ones(101,1)*etared(1, :, 2)).*gauss(V,etared(:, :, 2)),2);
u3=W*sum(ones(101,1)*etared(1, :, 3)).*gauss(V,etared(:, :, 3)),2);
u4=W*sum(ones(101,1)*etared(1, :, 4)).*gauss(V,etared(:, :, 4)),2);
u5=W*sum(ones(101,1)*etared(1, :, 5)).*gauss(V,etared(:, :, 5)),2);
u6=W*sum(ones(101,1)*etared(1, :, 6)).*gauss(V,etared(:, :, 6)),2);

hold on
plot(V,u1);
plot(V,u2);
plot(V,u3);
plot(V,u4);
plot(V,u5);
plot(V,u6);
hold off

figure(2)
hist(saut_h,100);
hold on;
u=zeros(101,6);
for i=1:6
    u(:,i)=W*lapgen(V,reslap(1,i),reslap(2,i));
    plot(V,u(:,i));
end
hold off

figure(3);

p=[1:100]/100;
V1=[-200:0.1:200]';
Y=quantile(saut_h,p);

%Qlap=zeros(size(V1,1),6);
%Quantile=zeros(100,6);
hold on
for i=1:6
    Qlap(:,i)=0.5+0.5*sign(V1)_
```

```
. *gammainc((abs(reslap(2,i)*V1)).^reslap(1,i),1/reslap(1,i));  
    for j=1:100  
        [e,k]=min(abs(Qlap(:,i)-p(j)));  
        Quantile(j,i) = V1(k);  
    end  
    plot(Quantile(2:99,i),Y(2:99));  
end  
hold off
```